

Maxima und Minima – Arbeitsauftrag

Vergessen Sie nicht, auch Ihre Überlegungen und Irrwege mit aufzuschreiben!

Die Berechnung höchster und tiefster Punkte von Kurven ist eine der wichtigsten Anwendungen der Differentialrechnung. Mit Hilfe moderner Computer lassen sich diese Probleme in den meisten Fällen, die uns zugänglich sind, auch ohne Differentialrechnung lösen, indem man einfach probiert.

Bei Problemen mit vielen Variablen, wie sie in der Praxis in der Regel auftauchen, stößt man jedoch schnell an die Grenzen auch der modernsten Großcomputer, wenn man stur probiert. Deshalb ist in der Praxis jede Methode willkommen, die (Computer-)Rechenarbeit spart.

Zentrale Frage: Wie findet man rechnerisch die lokalen Maxima und Minima einer Funktion?

Als Beispiel sollen Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 3$ untersuchen. Hat sie lokale Minima oder Maxima? Entweder Sie überlegen es sich selbst oder Sie führen einige der folgenden Punkte durch:

1. Zeichnen Sie das Schaubild mit dem Taschenrechner! Verschaffen Sie sich so einen Überblick!
2. Überlegen Sie sich das Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$!
3. An lokalen Maxima oder Minima sollte – wie wir gesehen haben – die Ableitung 0 sein. Suchen Sie Nullstellen der Ableitung!
4. Wählen Sie x -Werte an den Nullstellen der Ableitung und in der Umgebung links und rechts davon! Bauen Sie die Wertetabelle mit diesen x -Werten so aus, dass Sie sehen, was vorgeht!
5. Überlegen Sie sich, in welchen Bereichen die Ableitung positiv bzw. negativ ist! Wo wechselt die Ableitung ihr Vorzeichen? Was folgt daraus für die Monotonie?
6. Erinnern Sie sich daran, wie viele Nullstellen eine Funktion dritten Grades höchstens haben kann. Enthält Ihr Schaubild schon alle Nullstellen (angenähert)?
7. Wir streben eine Aussage an von folgender Art:
„Dort wo f' einen Vorzeichenwechsel von + nach – hat, ist ein lokales Maximum von f .“
Damit das eine vernünftige Aussage ist, braucht man eine Beschreibung eines lokalen Maximums, die die Ableitung nicht verwendet. Versuchen Sie, eine solche Beschreibung zu geben!
8. Manchmal ist die Bedingung „ f' wechselt das Vorzeichen“ unbequem. Man kann stattdessen die 2. Ableitung verwenden. Welches Vorzeichen hat die 2. Ableitung von f in der Nähe der lokalen Maxima und Minima?
9. Jetzt können Sie Ihre Überlegungen mit dem Buch vergleichen!

Für alle, die noch ein Stückchen weiterdenken möchten:

10. Warum ist am Rand des Definitionsbereichs alles anders? Schränken Sie dafür f auf das Intervall von -3 bis $+5,5$ ein und suchen Sie im Schaubild nach höchsten und tiefsten Punkten am Rand des Definitionsbereichs!