Name des Maturanden:

Kantonsschule Zürcher Oberland
Wetzikon

Maturitätsprüfung 1989
schriftlich
Mathematik
Klasse C7b

M a t h e m a t i k

Dauer: 4 Stunden

Erlaubte Hilfsmittel: Eigene Formelsammlung und programmierbarer Taschenrechner

Bewertung:	Aufgabe	1a b c d e	2a b c	3	4	5a b c	6a b c d	7a b c d e f	Total
	Punkte	3 3 5 1 4	4 5 4	9	10	1 6 4	2 4 7 5	6 5 5 9 3 7	112

Hinweise: Bearbeiten Sie bitte auf jeder A4-Seite des karierten Papiers nur eine einzige Aufgabe.
Diese Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit Namen abzugeben.
Für die Note 6 muss die Maximalpunktzahl nicht erreicht werden.
Beachten Sie besonders die Aufgabe Nr. 7.

1. Kurvenschar

Gegeben sei die folgende Kurvenschar mit Scharparameter a ($a \geq 0$):

$$y = \frac{1}{8} \cdot (x^3 - a \cdot x^2 + a^2)$$

a) Berechnen Sie (exakt als irrationale Zahlen) die Nullstellen der Scharkurve für $a = 8$.
b) Stellen Sie die Schar graphisch dar mit 2 Häuschen als Längeneinheit für $-3 < x < 8$ und für $a \in \{0,4,8\}$.
c) Berechnen Sie die Hüllkurve der Schar und diskutieren Sie sie (Nullstellen, Extrema, Wendepunkte).
d) Welche Kurven der Schar berühren die Hüllkurve in deren Extrema?
e) Bestimmen Sie die Differentialgleichung 1. Ordnung dieser Kurvenschar. Was für ein Typ von Differentialgleichung entsteht dabei?

2. Funktionen und Extremalaufgaben rund um das Schweizerkreuz

Das Schweizerkreuz besteht aus einem Zentrumsquadrat und vier aufgesetzten Rechtecken (siehe beiliegende Serviette). Die folgenden drei Teilaufgaben a), b) und c) sind unabhängig.

a) Man lege durch das Symmetriezentrum des Schweizerkreuzes, parallel zu den Quadratseiten ein Koordinatensystem und beschreibe die Kurve, auf der die beiden konvexen Schweizerkreuzecken mit positiven Koordinaten wandern, wenn verlangt wird, dass die Fläche des gesamten Kreuzes 4 betragen soll.
b) Das Zentrumsquadrat habe die Seitenlänge 1. Man lege einen Einheitswürfel mit einer Seitenfläche exakt auf das Zentrumsquadrat und falte die Rechtecke hoch, bis sie an den vier Seitenwänden des Würfels anliegen. Weil die Rechtecke länger als 1 sind, überragen sie um den Überhang x das Dach des Würfels. Diese vier Streifen der Breite x werden auf das Dach des Würfels herabgefaltet. Auf dem Dach bleibt ein Quadrat frei. Wie muss x gewählt werden, damit das Produkt der freien Quadratfläche und der Streifenbreite x maximal wird? In welchem Verhältnis stehen dann die Seiten der Rechtecke des Schweizerkreuzes?
c) Wenn man aus einem Quadrat mit Seitenlänge 1 vier quadratische Stücke der Seitenlänge x in den vier Ecken wegschneidet, erhält man das Netz (Abwicklung) eines Quaders ohne Deckel, das die Form eines Schweizerkreuzes hat. Das Volumen dieses oben offenen Quaders beträgt dann $V(x) = (1-2x)^2 \cdot x^1$. Leider hat diese Funktion ihr Maximum nicht bei $x = 7/20$, was zu den effektiven Proportionen des Schweizerkreuzes nötig wäre. Baut man sich Quader mit den weggeschnittenen Quadraten als Grundfläche, so ergäbe sich $V(x) = (1-2x)^1 \cdot x^2$, was leider auch nicht auf die gewünschte Extremalstelle führt. So behilft sich der Mathematiker mit der abstrakten Zielfunktion $V(x) = (1-2x)^a \cdot x^{3-a}$ und fordert, dass a so zu bestimmen sei, dass V(x) für $x = 7/20$ ein Maximum hat. Wie gross ist a?

3. Eine Legende zur Proportion des Schweizerkreuzes

Mutter Helvetia zerschneidet ihren roten, kreisrunden 1. August-Kuchen mit einem aus weisser Kirschglasur gefertigten, symmetrisch plazierten Schweizerkreuz zuerst in dessen Armrichtungen in vier gleiche Teile. Anschliessend schneidet sie den Kuchen durch sechs weitere gerade Schnitte durch das Zentrum in insgesamt 16 sektorförmige Stücke, die alle den gleichen Zentriwinkel aufweisen. Sie hat festgelegt, dass Kinder diejenigen Stücke erhalten, die wenig weisse Glasur tragen, Erwachsene dagegen die Stücke mit viel Glasur. Zudem hat Sie sich auferlegt, dass das Verhältnis von Erwachsenenglasurmenge zu Kinderglasurmenge 3 zu 1 betragen soll. Welches ganzzahlige Verhältnis (mit Zahlen unter 20) von Armlänge zu Armbreite musste Helvetia für das Schweizerkreuz wählen, damit ihre Forderung möglichst gut erfüllt wird?

Hinweise: Wählen sie die halbe Armbreite als 1 und die Armlänge als x (>2). Berechnen Sie x zuerst als irrationale Zahl (exakter Term wird höher bewertet als die numerische Näherung) und suchen Sie dann durch Probieren mit dem Taschenrechner eine "einfache" rationale Zahl, die x gut annähert und die heute gültige Proportion des Schweizerkreuzes liefert. Die beiliegende, zweimal gefaltete Serviette kann zur Unterstützung der Anschauung zwei weitere Male geeignet gefaltet werden.

4. Bau eines Wallfahrtkirchleins

Auf einem leicht geneigten Felsplateau A(3/6/3) B(0/8/3) C(4/0/4) soll ein Wallfahrtskirchlein gebaut werden. (Alle Koordinatenangaben werden hier in der Einheit 100 Meter gemessen.) An den Kanten AB resp. AC fällt das Gelände nahezu vertikal ab. Unten im Tal verläuft eine gerade Strasse P(12/0/0) Q(0/9/0). Nun wird verlangt, dass man von jedem Punkt der Strasse die Spitze K des 20 Meter (= 0.2) hohen Kirchturms, den wir als vertikale Strecke idealisieren, sehen können muss. Allerdings möchte man aus Sicherheitsgründen den Kirchturm möglichst weit weg von den gefährlichen Kanten plazieren, und zwar so, dass die Parallelogrammfläche begrenzt durch AB, AC und den Fusspunkt F des Kirchturms möglichst gross wird. Wo in der Ebene ABC muss F gesetzt werden?

Hinweise: Zeichnen Sie die Situation in einem "Würfelbild" ein und entscheiden Sie intuitiv, welcher Punkt des Plateaus für die Sichtbarkeit der Kirchturmspitze K relevant ist. Die Sichtbarkeitsbedingung liefert dann eine erste Ebenengleichung (Koordinatengleichung). Eine weitere Ebene, in der K liegen muss, liefert die festgelegte Kirchturmhöhe: Stellen sie hierfür eine Parametergleichung auf mit Aufpunkt R(3/6/3.2) und den Kantenvektoren als Richtungsvektoren. Begründen Sie schliesslich, weshalb man bei der Optimierung einzig das Produkt der beiden Parameter maximieren und nicht die effektive Parallelogrammfläche berechnen muss.

5. Testen der Wirkung von Hagelkanonen

Im Tages-Anzeiger vom 25. 7. 89 steht folgendes:

"Etwa hundert mit Silberjodid geimpfte Hagelgewitter werteten die Wissenschafter aus, und weitere hundert unbehandelte als Gegenbeispiele. Der Aufwand war sicher gross, denn auf etwa hundert Gewitter bescheren uns glücklicherweise nur zwei bis drei Hagel. «Es war kein signifikanter Unterschied feststellbar», umreisst Waldvogel das Ergebnis und erklärt damit, warum für ihn Raketenschiessen gegen Hagel nichts bringt."

a) Was versteht man in der Mathematik unter dem Begriff "Gegenbeispiel"?

b) Untersuchen Sie mit Hilfe der Poissonverteilung den oben beschriebenen Test und geben Sie mit Sätzen und Zahlen die Nullhypothese, die Einshypothese und den Verwerfungsbereich (bei einem Fehler 1. Art von 5%) an. Je nach Ihrer Wahl der Nullhypothese entstehen beim Verwerfungsbereich Probleme, die Sie ansprechen sollten.

c) Wie gross müsste man den Stichprobenumfang wählen, wenn der Verwerfungsbereich (bei gleichen Hypothesen und Fehler 1. Art wie in b)) "kein oder ein Hagelgewitter" lauten soll? (Newtonsches Näherungsverfahren verwenden!)

6. Statistik und Exponentialfunktion

Im Heft "THEMA" (Nr. 7/Juni 1989) findet sich auf der Seite 23 eine Zusammenstellung der Bevölkerungszahlen der Schweiz.

a) Begründen Sie mit Hilfe der nebenstehenden Zahlen, dass die Bevölkerung stärker als exponentiell wächst.

b) Stellen Sie im beigelegten einfach-logarithmischen Papier die Bevölkerung als Funktion der Zeit dar (100 Jahre entsprechen 2 cm auf der linearen Achse; 10^1 entspricht einer Million Personen auf der log-Achse) Bestätigen Sie erneut die Aussage von a).

Bevölkerung der Schweiz 1500-1980
(innerhalb der heutigen Landesgrenzen)

1500	ca.	600 000
1600	ca.	920 000
1700	ca.	1 200 000
1800	ca.	1 666 000
1850	ca.	2 393 000
1900	ca.	3 315 000
1950	ca.	4 715 000
1980	ca.	6 366 000

c) In der graphischen Darstellung von b) wird nun die Zeit x in Einheiten von 10 Jahren (x-Werte: 150, 160,…,198) und die Bevölkerung y in (mit dem Massstab herausgelesenen) gerundeten Millimetern (y-Werte: ca. 70,…,162) gemessen. Sie erhalten eine Wertetabelle mit 8 Punkt-koordinaten (x/y). Legen Sie die beste Gerade (erste Ausgleichs- oder Regressionsgerade) durch diese 8 Punkte. (Verlangt sind nebst den numerischen Werten der Schwerpunkts-koordinaten und der Steigung der Geraden auch die Terme, die zu ihrer Berechnung aus den 16 Zahlen gebildet wurden, sowie die korrekte Darstellung der Geraden auf dem Log-Papier.)

d) Geben sie eine Formel an, mit der alle Bevölkerungszahlen z (z. B. 600 000) in die in c) verwendeten Millimeterangaben y (z. B. 70) umgerechnet werden. Zusammen mit Steigung und Schwerpunktskoordinaten, also der Geradengleichung y(x), sollte es dann möglich sein, die "beste" Exponentialfunktion z(x) anzugeben, welche möglichst gut die 8 Wertepaare (x/z) der zitierten Tabelle liefert.

7. Basis- und Kurzaufgaben

a) Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen von $y = \sin(x)\cdot\ln(x)$ für $x > 0$. Studieren Sie den Grenzwert für $x \to 0$ auf verschiedene Arten und berechnen Sie die Taylorreihe an der Stelle $x = 1$ mit zwei von Null verschiedenen Gliedern.

b) Zeigen Sie, dass der Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von $y = \cosh(x)$ und $y = \sinh(x)$ für $x \geq 0$ endlich ist. Wie gross ist sie? Wie steht es, wenn man das Volumen berechnet, das bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht?

c) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung im Bereich $0 < x < \pi/2$:

$$\frac{y'}{\sin(x)} + \frac{y}{\cos(x)} = 1$$

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Apfel sauer ist, wenn unter den 7000 sauren Früchten im Korb 30%, unter den 4000 süssen daselbst jedoch nur 10% Äpfel sind? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,dass man beim Auswählen von 88 Früchten mindestens 50 saure erwischt? (Verwenden Sie hier geeignete und begründete Näherungen!)

e) Wie gross ist der Abstand des Punktes Q von der Ebene ABC in Aufgabe 4) ?

f) Untersuchen Sie die komplexe Funktion $w = f(z) = 2iz + 6 - i$. Berechnen Sie die Fixpunkte in Normalform. Welches ist das Bild in der w-Ebene der Geraden durch 0 und den Punkt (1/i) in der z-Ebene? (Setzen Sie $z = x + iy$ und $w = u + iv$ und geben Sie v(u) für die Bildkurve an.)