Maturitätsprüfungen 2000/2001
schriftlich

Kantonsschule Zürcher Oberland
Wetzikon

Mathematik
Klasse L7b

Mathematik

Dauer: 4 Stunden

Zugelassene Hilfsmittel: Eigene Formelsammlungen ohne Zusatzblätter, 2 Taschenrechner: HP 38-G
Bewertung:

Aufgabe	1a	b	c	d	e	2a	b	c	d	e	f	3a1	a2	a3	b1	b2	b3
Punkte	6	3	2	4	2	3	4	1	6	5	3	2	4	7	4	3	6

Aufgabe	4a	b	c	d	e	5a	b	c	d	e	6a	b	c	d	e	Total
Punkte	4	1	5	4	5	5	2	5	1	4	6	6	5	5	5	128

Regeln und Hinweise: Bearbeiten Sie bitte auf einer A4-Seite des karierten Papiers nur eine einzige Aufgabe. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit Namen versehen abzugeben. Für die Note 6 muss die Maximalpunktzahl bei weitem nicht erreicht werden.

1. Eine quaderförmige Getränkepackung soll einen quadratischen Boden erhalten. Aussen an einer Seitenwand soll diagonal ein Trinkhalm der gegebenen Länge l befestigt werden. Wir nehmen an, der Trinkhalm reiche genau von Ecke zu Ecke. Wie müssen die Länge a der vier Grundkanten beziehungsweise die Länge der Höhe h des Quaders gewählt werden, wenn das Volumen des Quaders maximal sein soll?
a) Lösen Sie diese Extremalaufgabe zuerst mit h als Variablen der Zielfunktion. Dabei ist l eine gegebene Konstante. Geben Sie das optimale h und a als exakten Term mit l an.
b) Zeigen Sie, dass für das gefundene h ein Maximum des Volumens vorliegt. Wie viel beträgt dieses maximale Volumen exakt ausgedrückt mit l? Vereinfachen Sie den Term so stark wie möglich.
c) Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal das optimale h aus der Länge l, die jetzt 5 cm betragen soll.
d) In einem zweiten Lösungsweg lösen Sie die gleiche Extremalaufgabe mit der Variablen a. Weisen Sie nach, dass auf beiden Lösungswegen die gleiche optimale Quaderform entsteht.
e) Beweisen Sie, dass der Trinkhalm für alle Quaderformen lang genug ist, um vom Loch oben in der Mitte bis in alle unteren Ecken zu reichen.

2. Ein einfaches Haus hat als Grundfläche ein Rechteck mit den Ecken $O(0/0/0)$, $A(6/0/0)$, $B(6/10/0)$ und $C(0/10/0)$. Ein Giebeldach mit den beiden Firstpunkten $E(3/0/5.5)$ und $F(3/10/5.5)$ und den zwei Traufen $P(0/0/4)$ $Q(0/10/4)$ und $R(6/0/4)$ $S(6/10/4)$ überdeckt das Haus. Genau auf der Mitte des Daches, auf der Mitte des Firstes, steht ein schlanker Kamin, den wir uns als Strecke vorstellen und der mit seiner Spitze K bis auf die Höhe 8 reicht.
a) Konstruieren Sie das Haus mit Kamin in einem Schrägbild. (2 Häuschen als Einheit auf y- und z-Achse)
b) Im Dachstock des Hauses wird nun durch die Punkte R und Q diagonal eine vertikale Trennwand (mathematische Ebene) eingebaut, die bis an die Untersicht des Daches reicht. Welchen Winkel schliesst diese Wand mit einer der beiden ebenen Dachflächen ein?
c) Um die Trennwand am Dach zu befestigen will man je einen Balken an jede Dachfläche schrauben, so dass die Trennwand bündig daran angelehnt und befestigt werden kann. Weil der Balken schief an die Dachfläche kommt, ist sein Querschnitt nicht quadratisch oder rechteckig. Geben Sie mit einer Zeichnung eine mögliche Querschnittsfläche dieses Balkens an.
d) Der Verpackungskünstler Christo packt das Haus in Plastikfolie straff ein. Zwischen der Spitze K des Kamins und dem Dach entsteht ein Hohlraum. Berechnen Sie das Volumen dieses Hohlraums durch eine übersichtliche Aufteilung in Tetraeder, die auch im Bild nachgeführt werden sollen.
e) Berechnen Sie den exakten (irrationalen) Wert des Flächeninhalts einer Dachfläche und mittels einer Ebenengleichung den exakten Abstand der Kaminspitze von einer Dachflächenebene. Weisen Sie mit diesen beiden Zahlen nach, dass das Ergebnis aus d) korrekt ist.
f) Mit welchem Winkel trifft der Kamin auf die Folienebene durch die Punkte KER.

3. Zwei unabhängige Teilaufgaben:
a) Bei einer Multiple-Choice-Prüfung werden 20 Fragen gestellt. Zu jeder Frage stehen drei Antworten zur Auswahl, von denen immer nur eine korrekt ist.
a1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Testperson genau 6 Fragen richtig beantwortet, wenn sie sich nur aufs zufällige Tippen verlegt? (Formel angeben)
a2) Mit welchen Anzahlen von Treffern kann man mit einer Sicherheit von 95% rechnen? (Formeln angeben)
a3) Eine Testperson behauptet, sie hätte sich wirklich auf die Prüfung vorbereitet und zum verlangten Thema gelernt. Sie erzielt 12 Treffer. Ist dieses Ergebnis auf einem Sicherheitsniveau von 99% signifikant

besser als das rein zufällige Tippen? (Lösen Sie diese einseitige Testaufgabe einerseits durch Berechnen des Konfidenzintervalls und andererseits durch Berechnen des Verträglichkeitsbereichs. Prüfen Sie schliesslich Ihre Aussage durch Berechnen und Interpretieren der Wahrscheinlichkeit, dass 0 bis 11 Treffer erzielt werden.)

b) Lässt sich die um 1 vergrösserte Maximalpunktzahl n einer Prüfung durch 6 teilen (z. B. $n = 29$), so können die Noten von 1 bis 6 immer gleich grossen Punktzahlbereichen zugeordnet werden: 0 bis $\frac{n-5}{6}$ Punkte geben die Note 1, $\frac{n+1}{6}$ bis $\frac{2n-4}{6}$ Punkte geben die Note 2, $\frac{2n+2}{6}$ bis $\frac{3n-3}{6}$ Punkte geben die Note 3 usw.
b1) Geben Sie die Grenzen für die Noten 4 und 5 an. Berechnen Sie die Mitte des Bereichs für die Note 4.
b2) Nun trifft man die Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit p für das Erzielen irgend eines Punktes für einen 4er-Schüler gerade so gross ist, dass der Erwartungswert seiner Punktzahlen auf die Mitte des Punktebereichs fällt, der für die Note 4 vorgesehen ist. Berechnen Sie $p(n)$ und geben Sie an, welchem Wert p zustrebt, wenn n gegen unendlich strebt. (Wenn Sie das schwierig finden, rechnen Sie einfach mit $n = 29$.)
b3) Wie gross muss die Maximalpunktzahl n gewählt werden, wenn man erreichen möchte, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein 4er-Schüler tatsächlich die Note 4 erhält, über 90% steigt? (Hinweise: Die Antwort lässt sich nur durch mehrfaches Probieren mit $n = 29$, $n = 35$, $n = 41$ usw. mit einem Taschenrechnerprogramm gewinnen. Sie dürfen anstelle des exakten Wertes für $p(n)$ den festen Wert von p für $n = 29$ oder auch $\lim\limits_{n\to\infty} p$ benützen. Geben Sie die Formel Ihres Programms an, und notieren Sie Ein- und Ausgaben.)

4. Diskutieren Sie die Funktion $y = f(x) = \arcsin(\sqrt{x})$ mit y in Bogenmass.
a) Lassen Sie den Graphen dieser Funktion vom Taschenrechner zeichnen und übertragen Sie ihn möglichst genau und mit gleichen Längeneinheiten auf beiden Achsen auf Ihr Blatt. Legen Sie den Definitions- und den Wertebereich exakt fest.
b) Welcher Punkt des Graphen wird vermutlich Symmetriezentrum des Graphen sein?
c) Bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$. Da in ihr der Term $(1 - x) \cdot x$ auftritt, können Sie begründen, dass der Graph der Ableitung achsensymmetrisch ist. Wie folgt daraus die Bestätigung der Vermutung von b)?
d) Bestimmen Sie die Steigung der Wendetangenten des Graphen.
e) Berechnen Sie zu $y = f(x)$ die Umkehrfunktion $y = g(x)$. Die Ableitung $g'(x)$ berechnen Sie direkt mit Hilfe der Ableitungsregeln. Bestätigen Sie $g'(x)$ mit der Methode für die Ableitung einer Umkehrfunktion.

5. Zwischen den Graphen von $y = \mathrm{e}^{-x}$ und $y = \frac{1}{x}$ wird eine Fläche eingeschlossen, deren Inhalt gesucht ist.
a) Dazu grenzt man die x-Werte zunächst auf $1 \le x \le 4$ ein. Zeichnen Sie die Graphen mit 5 Häuschen als Längeneinheit auf beiden Achsen. Berechnen Sie diesen Flächeninhalt exakt und genähert.
b) Untersuchen Sie den Inhalt des bis ins Unendliche reichenden Teils der Fläche ($1 \le x < \infty$). Warum soll man nicht bei $x = 0$ mit Integrieren beginnen?
c) Nun verschiebt man den Graphen von $y = \frac{1}{x}$ um 1 nach links. Zeigen Sie, dass der verschobene Graph und jener von $y = \mathrm{e}^{-x}$ einen gemeinsamen Punkt haben und sich dort sogar berühren. Weiter gegen rechts hin gibt es eine Stelle, wo beide Graphen gleiche Steigung haben. Berechnen Sie diese Stelle mit dem Solver näherungsweise auf 9 Nachkommastellen.
d) Die Verschiebung in c) hat man gemacht in der Hoffnung, dass das zwischen den beiden Kurven liegende Flächenstück doch noch endlichen Flächeninhalt hat. Bestätigt sich diese Hoffnung? (Grund angeben)
e) Nun rotiert man das in c) entstandene Flächenstück um die x-Achse. Wie gross ist das Volumen dieses von $x = 0$ bis ins Unendliche reichenden Körpers?

6. Kurzaufgaben
a) Bestimmen Sie Nullstellen, Pole, schiefe Asymptotenkurve sowie einen qualitativen Graphen der Funktion

$$y = \frac{2x^3 - x^2 - 7x + 6}{x^2 - 1} \ .$$

b) Von einem Punkt P ausserhalb einer Kugel mit Radius r werden sämtliche Tangentengeraden an die Kugel gelegt, so dass ein Berührkegel mit Spitze P entsteht, der die Kugel in einem Kleinkreis berührt. Wird nun auf die Kugel eine Halbkugel so aufgesetzt, dass der Rand der Halbkugel genau auf dem Kleinkreis der Kugel liegt, so zeigt es sich, dass der Punkt P genau auf der Halbkugel liegt. Berechnen Sie das Volumen zwischen Kugel und Halbkugel exakt und genähert als Funktion von r.
c) Am 2. Januar 2001 zahlen Sie Fr. 500.– auf das neu eröffnete spesenfreie Konto mit einem Jahreszinssatz von 3%. Wie viel Geld liegt auf dem Konto nach 35 vollen Jahren, also am 31. Dezember 2035, wenn Sie immer an Neujahr wieder Fr. 500.– einzahlen, Sie nie etwas abheben und der Zinssatz als konstant angenommen wird. Welche Theorie wenden Sie an, um die 35 Summanden elegant zu addieren?
d) Sie beauftragen Ihr Patenkind, am Markt 10 Früchte einzukaufen. Zur Auswahl stehen Äpfel, Birnen und Clementinen. Das Kind füllt die 10 Früchte in einen langen, engen, durchsichtigen Strumpf, so dass die Früchte schön der Reihe nach zu sehen sind. Wie viele verschiedene Strümpfe könnte das Kind zurückbringen? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind bei rein zufälligem Einpacken genau 5 Äpfel, 3 Birnen und 2 Clementinen heimbringt?
e) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein realer Spielwürfel eine Sechs zeigt, ist nur ungefähr $\frac{1}{6}$. Wie oft soll man nun einen solchen Spielwürfel werfen, wenn man seine 6er-Wahrscheinlichkeit mit einer Sicherheit von 99% auf 0.1% genau bestimmen will? (Formeln angeben und begründen)