Maturitätsprüfungen 2000/2001
schriftlich

Kantonsschule Zürcher Oberland
Wetzikon

**Mathematik**
Klasse C7b

**Mathematik**

Dauer: 4 Stunden

Zugelassene Hilfsmittel: 2 eigene Formelsammlungen ohne Zusatzblätter, 2 Taschenrechner: TI-92 und TI-89
Bewertung:

| Aufgabe | 1a | b | c | d | 2a | b | c | d | e | 3a | b | c | d | e | 4a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 4 | 2 | 5 | 5 | 6 | 1 | 4 | 1 | 2 | 4 | 6 | 5 | 3 | 6 | 4 | 6 | 7 | 5 |

| Aufgabe | 5a | b | c | d | e | 6a | b | c | d | e | f | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 5 | 5 | 7 | 4 | 5 | 7 | 7 | 7 | 7 | 5 | 5 | 140 |

Regeln und Hinweise: Bearbeiten Sie bitte auf einer A4-Seite des karierten Papiers nur eine einzige Aufgabe. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit Namen versehen abzugeben. Für die Note 6 muss die Maximalpunktzahl bei weitem nicht erreicht werden.

**1.** Einem geraden Kreiskegel mit Grundkreisradius $r = 1$, Grundkreismittelpunkt $M$ und Höhe $h = 3$ wird ein kleinerer gerader Kreiskegel so einbeschrieben, dass dessen Spitze in $M$ und dessen Grundkreis mit Radius $x$ auf der Mantelfläche des ersten Kegels liegt.
**a)** Berechnen Sie die Mantelfläche des einbeschriebenen Kegels als Funktion $M(x)$.
**b)** Begründen Sie, weshalb man anstelle der Funktion $M(x)$ auch die Funktion $f(x) = \left(\frac{M(x)}{\pi}\right)^2$ zur Berechnung der Extrema von $M(x)$ benützen kann.
**c)** Stellen Sie die Funktion $y = f(x)$ mit 10 Häuschen als Einheit graphisch dar und bestimmen Sie von Hand sämtliche Maximal- und Minimalwerte im zugelassenen Definitionsbereich. Zeigen Sie, dass genau vier Extremalaufgaben zur Mantelfläche des einbeschriebenen Kegels formuliert werden können.
**d)** Es sei nun $M_h(x)$ die Mantelfläche des einbeschriebenen Kegels, wenn der erste Kegel mit dem Grundkreisradius $r = 1$ allgemein die Höhe $h$ aufweist. Geben Sie $f_h(x) = \left(\frac{M_h(x)}{\pi}\right)^2$ an. Für welche Werte von $h$ haben einige der vier Extremalaufgaben aus c) keine Lösung mehr?

**2.** Untersuchung der Abbildung des dreidimensionalen Raums, die durch folgende Matrix vermittelt wird:

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -22 & -28 \\ 14 & 34 & 22 \\ -10 & -14 & 1 \end{pmatrix}$$

**a)** Geben Sie die charakteristische Gleichung dieser Abbildung an und berechnen Sie mit ihr die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren. Zeigen Sie bei einem Eigenvektor, wie Sie ihn von Hand ausrechnen.
**b)** Geben Sie eine Transformationsmatrix $T$ an, welche möglichst viele Eigenvektoren auf Koordinatenachsen abbildet.
**c)** Transformieren Sie mittels $T$ die Abbildungsmatrix $A$ in die Matrix $A'$ und interpretieren Sie nun geometrisch deren Wirkung auf die drei Basisvektoren des Koordinatensystems.
**d)** Wie lässt sich das Volumen des Bildes des Einheitswürfels unter der Abbildung $A'$ direkt anhand der Matrix $A$ berechnen?
**e)** Erklären Sie anhand dieser Aufgabe die Begriffe geometrische und algebraische Vielfachheit.

**3.** Durch die Gleichung $16y + 4xy - 24x - 3x^2 - 8 = 0$ wird eine Kurve 2. Grades beschrieben.
**a)** Zeigen Sie, dass die Zuordnung $x \mapsto y$ eine Funktion $h(x)$ ist. Warum ist das bei Gleichungen 2. Grades nicht selbstverständlich? Welcher Klasse von Funktionen gehört $h(x)$ an? Zeichnen Sie einen Graphen.
**b)** Legen Sie ohne Differentialrechnung die Tangenten vom Punkt $P(0/2)$ an den Graphen von $h(x)$. Es sind zwei exakte Geradengleichungen verlangt.
**c)** Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden geraden Asymptoten des Graphen von $h(x)$. Verschieben Sie den Graphen so, dass der Schnittpunkt der beiden Asymptoten in den Ursprung fällt. Wie heisst die Gleichung des verschobenen Graphen? Welche Symmetrieeigenschaft kann man aus ihr ablesen?
**d)** Bestimmen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung die Gleichung der Winkelhalbierenden $w$ des spitzen Winkels der beiden Asymptoten des verschobenen Graphen. (Hinweis: Die Steigung von $w$ ist ganzzahlig.)
**e)** Drehstrecken Sie den verschobenen Graphen so, dass $w$ auf die $x$-Achse fällt. Beweisen Sie so, dass der Graph von $h(x)$ symmetrisch bezüglich beider Winkelhalbierenden seiner Asymptoten ist. (Hinweis: Die Komponenten der Abbildungsmatrix können ganzzahlig sein. Die Gleichung der Bildkurve soll keine Nennerwurzel enthalten.)

**4.** Bei einer Prüfungsaufgabe werden maximal 5 Punkte vergeben. Zu untersuchen ist die Zufallsgrösse $X =$ „Anzahl erreichter Punkte einer bestimmten Person“.

**a)** Zuerst nehmen wir an, die Person erreiche einen Punkt mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.95$ und zwar unabhängig vom Erreichen oder Nichterreichen der vorangehenden Punkte. Geben Sie in einer Tabelle die Verteilung der Zufallsgrösse $X$ mit 5 Nachkommastellen an und berechnen Sie mit ihr den Erwartungswert $E(X)$. Wie lässt sich $E(X)$ auch ohne Tabelle berechnen?

**b)** Das Modell wird realistischer, wenn man bei gleichem $p$ annimmt, dass jeder Punkt nur erreicht werden kann, wenn der vorangehende auch erreicht worden ist. Zeichnen Sie in einem Baumdiagramm, welche Wege zu den Totalpunktzahlen 0, 1, 2, 3, 4 und 5 führen. Wie sieht jetzt die Tabelle mit der Verteilung der Zufallsgrösse $X$ aus, wie gross sind $E(X)$ und die Standardabweichung? (5 Nachkommastellen)

**c)** Eine weitere Verfeinerung — bei gleicher Baumstruktur wie in b) — gibt folgende Annahme: Zwar beträgt die Erfolgswahrscheinlichkeit für den ersten Punkt der Aufgabe immer noch $p = 0.95$. Wegen Ermüdung der Person und wegen zunehmender Schwierigkeit der Aufgabe beträgt sie für den zweiten Punkt nur noch $k \cdot p$ mit $k = 0.8$. Für den dritten Punkt beträgt sie $k^2 \cdot p$, das heisst, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit von Punkt zu Punkt mit dem Faktor $k$ abnimmt. Stellen Sie für $x < 5$ einen Term $W(x)$ auf mit den Parametern $p$ und $k$, der die Wahrscheinlichkeit angibt, genau $x$ Punkte zu erzielen. Mit Hilfe von $W(5)$ bestätigen Sie allgemein, dass $W(0) + W(1) + ... + W(5) = 1$. Berechnen Sie $E(X)$ numerisch 5-stellig mit einer Tabelle.

**d)** Betrachten Sie die Kurvenschar $W(x) = k^{\frac{x(x-1)}{2}} - k^{\frac{x(x+1)}{2}}$ mit dem positiven Parameter $k < 1$. Der Term gibt die Lösung der Teilaufgabe c) für $p = 1$ an. Die Variable $x$ ist jetzt aber positiv und reell. Skizzieren Sie die Schar für $k \in \{0.5, 0.6, 0.7, 0.8\}$ und berechnen Sie deren Hüllkurve. Dabei können Sie das Ableiten und das Herstellen der Berührbedingung vom Taschenrechner ausführen lassen, geben aber die zugehörigen Resultate an. Die Gleichung der Hüllkurve soll möglichst stark vereinfacht werden.

**5.** Der Verpackungskünstler Christo hüllt eine Moschee mit Minarett in Plastik ein. Im dreidimensionalen Koordinatensystem besteht unser Modell der Moschee aus einem Drehzylinder mit Radius 99 und den beiden Mittelpunkten $N(0/0/-77)$ und $M(0/0/0)$ der beiden Grundkreise. Die Kuppel der Moschee ist eine auf den Zylinder aufgesetzte Halbkugel mit Radius 99 und Mittelpunkt M. Zusätzlich ist auf der Halbkugel eine Windfahne angebracht, die wir als Strecke $P(0/0/99)Q(0/0/121)$ auffassen. Neben der Moschee befindet sich das Minarett, das ebenfalls auf der Ebene $z = -77$ steht und durch die Strecke $R(0/126/-77)S(0/126/149)$ angedeutet wird. Die Plastikhülle wird so straff wie möglich um die ganze Anlage gelegt, so dass zwischen $Q$ und $S$ sowie zwischen $R$ und $S$ gerade Kanten der Hülle entstehen. Der gemeinsame Punkt auf dem Randkreis der Halbkugel und der vorderen Tangentialebene durch $RS$ an den Zylinder heisse $U$.

**a)** Skizzieren Sie ein qualitatives Schrägbild der verpackten Anlage. Heben Sie insbesondere hervor, wo ebene Stücke der Hülle entstehen. Hinweis: Legen Sie Berührkegel mit Spitze in $Q$ bzw. in $S$ an die Halbkugel.

**b)** Zeigen Sie in einer lückenlosen Rechnung, dass der Punkt $T(54/-18/81)$ derjenige Punkt auf dem vorderen Teil der Halbkugel ist, wo sich die beiden Berührkegel aus a) treffen.

**c)** Geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebene $QST$ an, berechen Sie den Abstand des Punktes $R$ von ihr, und berechnen Sie die Fläche und den Winkel bei $Q$ des Dreiecks $QST$. Welchen Abstand hat die Gerade $QT$ von der $x$-Achse?

**d)** Berechnen Sie den Punkt $U$. Welchen Flächeninhalt hat jede der beiden trapezförmigen Flächen der Hülle, die an die Kante $SR$ vorne und hinten angrenzen?

**e)** Wie gross ist der Flächeninhalt desjenigen Teils der Mantelfläche des Berührkegels mit Spitze $Q$, der zur Hülle gehört?

**6. Kurzaufgaben**

**a)** Bestimmen Sie die Isoklinenschar der Differentialgleichung $xy' - y = \sin(y')$. Zeigen Sie dann, dass sowohl die Isoklinen selbst als auch die Funktion der Hüllkurve dieser Schar Lösungen dieser Differentialgleichung sind.

**b)** Ist es aussergewöhnlich, dass von den 450'000 Wählenden von Palm Beach 19'000 den Wahlzettel für die Präsidentschaftswahl der USA fälschlicherweise mehrfach perforierten, wenn man aus Erfahrung weiss, dass normalerweise 2 Prozent der Wählenden diesen Fehler begehen? Argumentieren Sie einseitig auf einem Sicherheitsniveau von 99.99% erstens mit dem Konfidenzintervall und zweitens mit der Wahrscheinlichkeit für ein so extremes oder noch extremeres Ergebnis. Wie wäre es mit 19 ungültigen von 450 Wahlzetteln?

**c)** Berechnen Sie für beliebiges natürliches $n$ und $a > 1$ den endlichen Flächeninhalt zwischen dem Graphen von $y = x^n \cdot a^{-x}$ und der $x$-Achse. Mit der Substitution $2x = u$ beantworten Sie mit der gefundenen Formel die Frage nach dem Rotationsvolumen, das dieses Flächenstück bei Rotation um die $x$-Achse erzeugt.

**d)** Die komplexe Zahl $z = 3 + i + t(2 - i)$ ist abhängig vom reellen Parameter $t$. Welche Kurve beschreibt $z(t)$ in der Gaussschen Zahlenebene und wie sieht ihr Bild unter der Abbildung $z \mapsto w = 1/z$ in der $w$-Ebene aus? Für eine Zeichnung wählen Sie 10 Häuschen als Einheit.

**e)** Bestimmen Sie den reellen Parameter $b$ so, dass der Graph der Funktion $y = b^x$ den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion berührt.

**f)** Bei welchem Erwartungswert $\mu$ für die Anzahl Erfolge ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens 3 Erfolge bei einem Bernoulli-Experiment 80%? Rechnen Sie mit der Poisson-Verteilung und prüfen Sie mit der Binomialverteilung unter der zusätzlichen Annahme, dass 100 oder 1000 Experimente durchgeführt werden.