Kantonsschule Zürcher Oberland
Wetzikon

Maturitätsprüfungen 2002
schriftlich
Dauer: 4 Stunden

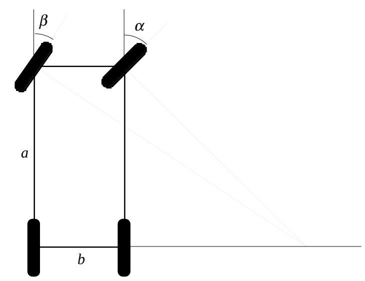
MATHEMATIK
KLASSE C6b

Erlaubte Hilfsmittel: 2 eigene Formelsammlungen ohne Zusatzblätter, 2 Taschenrechner: TI-89
Bewertung:

Aufgabe	1a	b	c	d	2a	b	c	d	3a	b	c	d	e	4a1	a2	b	c	d
Punkte	1	4	8	6	2	8	5	5	7	3	6	4	5	2	3	4	4	4

Aufgabe	5a	b	c	d	e	6a	b	c	d	e	Total
Punkte	4	4	3	6	5	5	5	5	6	5	129

Regeln und Hinweise: Bearbeiten Sie bitte auf einer A4-Seite des verteilten, karierten Papiers nur eine einzige Aufgabe. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit Namen versehen abzugeben. Für die Note 6 muss die Maximalpunktzahl nicht erreicht werden.



1. Damit ein Auto rutschfrei eine Kurve befahren kann, dürfen die eingeschlagenen Vorderräder nicht parallel zueinander stehen, sondern müssen so gestellt werden, dass die verlängerten Vorderradachsen sich auf der verlängerten Radachse der Hinterräder schneiden (siehe Figur). Der Radstand des Autos werde mit a, die Spur mit b bezeichnet.
a) Begründen Sie die oben genannte Forderung.
b) Wie stark muss das linke Vorderrad (Winkel β) eingeschlagen werden, wenn bekannt ist, wie stark das rechte Vorderrad (Winkel α) eingeschlagen ist? Geben Sie also die Funktion $\beta(\alpha)$ an. (Alle Winkel in Bogenmass)
c) Zur Diskussion der Funktion $\beta(\alpha)$ setzen Sie $a = 3$ und $b = 2$. Überprüfen Sie zuerst, ob die offensichtlichen Werte Ihrer Funktion $\beta(\alpha)$ stimmen: Für $\alpha = 0$ muss $\beta = 0$, für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ muss $\beta = \arctan(\frac{3}{5})$ und für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ muss $\beta = \arctan(\frac{3}{2})$ gelten. Skizzieren Sie sodann den Graphen von $\beta(\alpha)$ und den Graphen der Ableitung $\beta'(\alpha)$ (Herleitung!). Formulieren Sie eine Vermutung (ohne Beweis) zu je einer Symmetrie dieser Graphen.
d) Aus der Bedingung $\beta'(\alpha) = 1$ lassen sich im Bereich $0 \leq \alpha < \pi$ zwei exakte Werte von α berechnen. Geben Sie daraus den exakten Ort der vermuteten Symmetrieachse in c) an?

2. Zwei Flugzeuge fliegen mit konstanten Geschwindigkeiten auf geraden Flugbahnen. Das erste Flugzeug befindet sich zur Zeit $t = 0$ im Punkt $P(5/4/3)$ und fliegt mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, was bedeutet, dass es pro Zeiteinheit um den Vektor $\vec{v}_1$ vorankommt. Das zweite Flugzeug befindet sich zur Zeit $t = 0$ im Punkt $Q(-5/5/14)$ und fliegt mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
a) Geben Sie die Flugbahnen als Geraden g resp. h mit ihren Parameterdarstellungen $\vec{r}_1(t)$ resp. $\vec{r}_2(t)$ an.
b) An welchen Punkten der beiden Flugbahnen kommen sich die Flugbahnen am nächsten und wie gross ist dort der Abstand der beiden Flugbahnen? Einer dieser Punkte soll erkennbar als Durchstosspunkt einer Flugbahn mit einer geeigneten Ebene berechnet werden.
c) Wie gross ist tatsächlich der minimale Abstand der beiden Flugzeuge, wenn man berücksichtigt, dass die Flugzeuge sich nicht zur gleichen Zeit in den in b) berechneten Punkten befinden? Hinweis: Berechnen Sie das Minimum des Quadrats des Abstands mit Hilfe der Analysis.
d) Welche Bedeutung hat der in c) verwendete Differenzvektor $\vec{d}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$, wenn man ihn ebenfalls als Parameterdarstellung einer Geraden m interpretiert? Berechnen Sie mit Hilfe dieser Geraden m rein geometrisch den Zeitpunkt, zu dem die Flugzeuge minimalen Abstand voneinander haben.

3. Es sind fünf Integrationsaufgaben vorgegeben, von denen je eine mit einer der uns bekannten fünf Integrationsmethoden gelöst werden soll: Bekanntes Grundintegral, Innere Ableitung in Evidenz, Substitution, partielle Integration, Partialbruchzerlegung. Ordnen Sie je eine Aufgabe einer Methode zu und lösen Sie sie lückenlos.

a) $\int \frac{5 - 3u + u^3}{u^2 - 3u - 4} du$ **b)** $\int \frac{\sin(\sqrt{\ln x})}{x \cdot \sqrt{\ln x}} dx$ **c)** $\int \frac{e^{6s}}{1 - e^{3s}} ds$ **d)** $\int \frac{3}{1 + 2t^2} dt$ **e)** $\int v^2 \cdot \cosh(v) dv$

4. Für Rasenmäherbesitzer gilt die Regel, dass sie pro Woche eine gewisse Zeit lang ununterbrochen mähen und zwar — ausser sonntags — nur in der Zeit zwischen 14.00 Uhr und 19.45 Uhr.

a) In einer ersten Siedlung haben 40 Nachbarn genau gleich grosse Rasen und mähen jeweils pro Woche ununterbrochen im Mittel 45 Minuten lang.

a1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem beliebigen Zeitpunkt der Zeitspanne von 14.00 Uhr bis 19.00 Uhr ein Rasenmäher läuft? (Nach 19.00 Uhr darf niemand mit Mähen starten.)

a2) Damit der Lärm nicht zu gross wird, haben die Nachbarn abgemacht, dass höchstens zwei Rasenmäher zugleich laufen sollen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem beliebigen Augenblick der wöchentlich zugelassenen Zeitspanne von jeweils 14.00 Uhr bis 19.00 Uhr ein Bewohner warten muss, bis er seinen Rasenmäher anstellen darf?

b) In einer anderen Siedlung mit 400 gleichartigen Rasenmäherbesitzern und denselben zugelassenen Mähzeiten, aber ohne Einschränkung der Anzahl simultan laufender Rasenmäher stellt ein Lärmbeauftragter zu einem beliebigen Zeitpunkt fest, dass zehn Rasenmäher zugleich laufen. Aus dieser Angabe will er Rückschlüsse auf die Dauer eines Mähvorgangs ziehen. Geben Sie das zugehörige Konfidenzintervall bei einer Sicherheit von 80% an.

c) Ein Marktforscher vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit für das Laufen eines Rasenmähers innerhalb der zulässigen wöchentlichen Zeitspanne 2.5% beträgt. Nun möchte er wissen, wie viele Rasenmäherbesitzer er über ihre Mähzeit befragen muss, um mit einer Sicherheit von 90% diese Wahrscheinlichkeit auf ein halbes Prozent genau zu ermitteln.

d) Wie viele Rasenmäherbesitzer, die pro Woche 45 Minuten lang mähen, müssten mindestens in einer Siedlung leben, wenn man mit einer Sicherheit von 70% zu jedem zulässigen Zeitpunkt mindestens drei Rasenmäher hören möchte?

5. Das eigenwillige Dach eines quadratischen Kirchturms in Uster soll vereinfacht folgendermassen definiert werden: Das dreidimensionale Koordinatensystem wird durch die drei paarweise zueinander senkrecht stehenden Schenkelrichtungen des Kreuzes festgelegt, das auf dem Dach montiert ist. Damit liegt die Spitze des Dachs beim Punkt $P(0/0/-1)$. Die vier Ecken, bei denen der Dachbereich oberhalb der Zifferblätter anfängt, haben die Koordinaten $A(4/4/-19)$, $B(-4/4/-19)$, $C(-4/-4/-19)$ und $D(4/-4/-19)$. Die Punkte S und T bilden zusammen mit A und B das Rechteck $ABTS$, welches als eine der vier dunklen Schallöffnungen für das Geläute dient. Zur Festlegung von S und T betrachten wir den Punkt $M(0/2/-10)$, der in der Ebene ABP liegt. Legt man ein Lot zur Ebene ABP durch M und trägt auf ihm die Länge MP gegen aussen ab. So erhält man die Mitte N der horizontalen Kante ST. Analog sind die übrigen sechs äussersten Punkte U, V, W, X, Y und Z des Dachs definiert.

a) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene ABP und zeigen Sie, dass der Punkt M tatsächlich in der Ebene ABP liegt.

b) Konstruieren Sie einen massstäblichen Schnitt des Daches mit der yz-Ebene. Welchen Winkel bildet die Gerade PN mit der Ebene $ABTS$?

c) Berechnen Sie die Koordinaten der äussersten Punkte S und T des Daches.

d) Entgegen der vorschnellen Meinung stehen zwei benachbarte der acht steilen dreieckigen Flächen (z. B. APS und APZ) nicht senkrecht zueinander. Berechnen Sie diesen Zwischenwinkel.

e) Unter der vereinfachenden Annahme, dass zwischen den vier rechteckigen Schallöffnungen Dreiecke wie etwa APS und APZ das Dach bilden, berechne man das Volumen des gesamten Dachs im Bereich $-19 \leq z \leq -1$ mit Hilfe einer geeigneten Zerlegung und einer Determinanten.

6. Vermischte Kurzaufgaben

a) Stellen Sie die komplexe Zahl $12 + 5\mathrm{i}$ in Polarform dar und lösen Sie so die Gleichung $\mathrm{e}^z = 12 + 5\mathrm{i}$.

b) Es sei z_1 jene Lösung der Gleichung $z^3 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{26}$, die einen positiven Realteil hat. Bestimmen Sie die Polardarstellung von z_1 und zeigen Sie, dass die Zahl $z_2 = z_1 + \overline{z_1}$ reell und Lösung der Gleichung $z^3 - 9z - 2 = 0$ ist.

c) Bestimmen Sie für positive x die Hüllkurve der folgenden Kurvenschar mit positivem Parameter a:
$y = x \cdot \ln(a) + a \cdot \ln(x)$

d) Wie heisst die Lösung der Differentialgleichung $y' \cdot x - y \cdot \sqrt{x} = y$, deren Graph durch den Punkt (2/1) geht?

e) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $y = \arcsin(\sin x)$. Leiten Sie sie mit Hilfe der Ableitungsregeln ab und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Ergebnis des Taschenrechners.