Kantonsschule Zürcher Oberland
Wetzikon

Maturitätsprüfungen 2005
schriftlich
Dauer: 4 Stunden

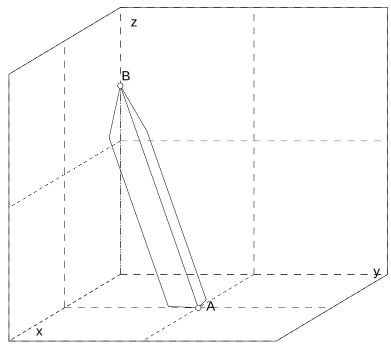
MATHEMATIK
KLASSE C6a

Erlaubte Hilfsmittel: 2 eigene Formelsammlungen ohne Zusatzblätter, 2 Taschenrechner: TI-89
Bewertung:

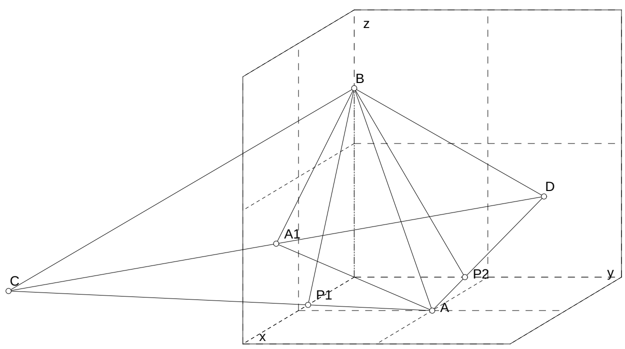
Aufgabe	1a	b	c	d	2a	b	c	d	e	f	3a	b	c	d	e	f	g	4a	b	c	d	e	f	g	Total
Punkte	7	6	5	6	4	2	6	4	3	5	4	3	5	5	4	3	5	10	4	4	5	3	6	7	116

Regeln und Hinweise: Bearbeiten Sie bitte auf einer A4-Seite des verteilten, karierten Papiers nur eine einzige Aufgabe. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit Namen versehen abzugeben. Für die Note 6 muss die Maximalpunktzahl nicht erreicht werden. Alle Berechnungen müssen so auf dem Papier stehen, wie wenn sie von Hand gemacht worden wären. Ausnahme: In der Stochastik können die erarbeiteten Programme verwendet werden, es soll aber deren Wirkung knapp angegeben werden.

1. Ein Balken mit quadratischem Querschnitt wird schräg in eine Zimmerecke (xyz-Koordinatensystem) gestellt (siehe erstes Bild). Dabei soll er die Ebene $x = y$ als Symmetrieebene und die vorderste Ecke auf dem Boden im Punkt $A(1/1/0)$ aufweisen. Ferner soll er mit 45° gegen die xy-Ebene geneigt sein. Daraus ergibt sich die Lage es obersten Punktes $B(0/0/\sqrt{2})$. Einem Schreiner soll nun mitgeteilt werden, wie das obere Ende des Balkens zuzuschneiden ist. Damit die Aufgabe besser handhabbar wird, denken wir uns die beiden sichtbaren Seitenflächen des Balkens zu mathematischen Ebenen verlängert (siehe zweites Bild), so dass es darum geht, deren Durchstosspunkte P_1 bzw. P_2 mit der x- bzw. y-Achse zu berechnen.

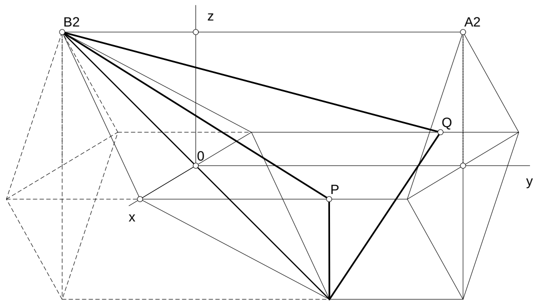


a) Zuerst bildet man eine Normalebene zu AB durch B und sucht den Punkt A_1 in deren 1. Spur und in der Symmetrieebene $x = y$. Dann trägt man die Länge $|A_1B|$ in beide Richtungen von A_1 aus auf dieser Spur ab und erhält die Punkte C und D (Herauslesen der exakten Koordinaten aus einer Konstruktion in der xy-Ebene ist erlaubt.) Damit sind die Seitenebenen des Balkens festgelegt und die Punkte P_1 und P_2 werden berechnet.



b) Eine andere Berechnungsmethode wäre, die Punkte $P_1(p/0/0)$ und $P_2(0/p/0)$ mit Hilfe eines noch offenen, positiven Parameters p anzusetzen und nur zu verlangen, dass die Ebenen ABP_1 und ABP_2 senkrecht zueinander stehen sollen.

c) Die bisherigen Berechnungen nützen einem Schreiner nicht unbedingt viel. Daher bringen wir den Balken in eine neue Lage und legen $B_2(0/-1/1)A_2(0/2/1)$ als Teil der Balkenkante und die y-Achse als Balkenachse fest (siehe drittes Bild). So beträgt der Winkel zwischen Balkenachse und OB_2 (ehemalige z-Achse) wie verlangt 45°. Nun berechnet man die Punkte P und Q auf den beiden Kanten in der xy-Ebene wiederum durch die Bedingung, dass die Ebenen OB_2P und OB_2Q senkrecht zueinander stehen.



d) Zur Kontrolle zeige man, dass die Winkel $\angle PB_2A_2$ und $\angle P_1BA$ (mit den Ergebnissen aus a) oder b)) gleich gross sind.

2. Gegeben ist die Funktionenschar $y = a \cdot \mathrm{e}^{-a(x+a)^2}$ für positives a.

a) Beschreiben Sie in Bezug auf die Graphen der Scharkurven qualitativ die Wirkung des Parameters a an den drei Stellen, an denen er in der Funktionsgleichung vorkommt. Wie nennt man solche Kurven?

b) Skizzieren Sie (mit 4 Häuschen als Längeneinheit) die Schar für die Parameterwerte $a \in \{0.5, 1, 1.5, 2\}$ mit $(-5) < x < 2$ und $(-1) < y < 2.5$.

c) Berechnen Sie eine Parameterdarstellung $(x(a)/y(a))$ der Hüllkurve der Schar. Notieren Sie genau, was

Sie wo im Taschenrechner eingeben, damit die Kurvenschar und die Hüllkurve simultan gezeichnet werden.

d) Zur Berechnung des Flächeninhalts zwischen einer beliebigen Scharkurve und der x-Achse muss man die bekannte Tatsache heranziehen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$. Damit man sie aber ausnützen kann, müssen Sie vorgängig die Substitution $u = (x + a)\sqrt{2a}$ durchführen.

e) Jede Scharkurve hat genau einen Hochpunkt. Zeigen Sie, dass alle diese Hochpunkte auf ein und derselben Geraden liegen.

f) Berechnen Sie Gleichungen der Kurven, auf denen die Wendepunkte der Scharkurven liegen. Neben Parameterdarstellungen mit Parameter a sollen auch explizite Darstellungen angegeben werden.

3. Wir werfen verschiedene Körper, die alle auf je einer Seite ein vereinbartes Gewinnzeichen tragen. Eine ideale Münze wird 540 Mal geworfen. Eine leere Toblerone-Schachtel, die nicht auf den Enden stehen bleiben kann, wird 810 Mal geworfen. Ein reguläres Tetraeder wird 1080 Mal, ein Würfel 1620 Mal, ein reguläres Oktaeder 2160 Mal und ein reguläres Dodekaeder 3240 Mal geworfen.

a) Berechnen Sie für jeden Körper (ohne Näherungsmethoden) die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 260 Mal und 280 Mal (inklusive) das Gewinnzeichen erscheint. Wie lauten die zugehörigen Formeln?

b) Welche Tendenz erkennt man in den Ergebnissen von a), und was ergibt sich, wenn die Anzahl der Flächen des Körpers und entsprechend die Zahl der Würfe gegen Unendlich strebt?

c) Berechnen Sie die gleichen Wahrscheinlichkeiten wie in a), hier aber mit Hilfe der Normalverteilung. Geben Sie auch hier die verwendeten Formeln an. Zeigen Sie anhand von u_{min} und u_{max}, dass die Zahlenfolge der Resultate (für die sechs Körper in obiger Reihenfolge) abnehmend sein muss.

d) Jemand vermutet, dass beim Würfel das Gewinnzeichen zu wenig oft erscheint. Sind die bei einem Test mit 1620 Würfen geworfenen 245 Gewinnzeichen signifikant tief? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) Berechnen Sie die Sicherheit (2-seitig), bei welcher sich der Messwert „245 Gewinnzeichen" bei 1620 Würfen des Würfels gerade an der Grenze des Verwerfungsbereichs der Hypothese $p = \frac{1}{6}$ befindet. Geben Sie die verwendete Formel an.

f) Wie oft müsste der Würfel geworfen werden, wenn man mit einer Sicherheit von 93% die erhaltene Gewinnwahrscheinlichkeit innerhalb einer Bandbreite von 1% haben will? Notieren und begründen Sie die verwendete Formel.

g) Wir werfen die drei einfacheren idealen Körper Münze, Toblerone und Tetraeder einmal miteinander. Mit wie vielen Gewinnzeichen kann man im Mittel rechnen?

4. Voneinander unabhängige Aufgaben

a) Berechnen Sie die Bogenlänge der durch folgende Parameterdarstellung gegebenen Kurve für $1 \le t \le \mathrm{e}^2$:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x(t) & = & 2t(\ln(t) - 1) \\ y(t) & = & t(\ln(t) - 1)^2 \end{array} \right\}$$

Die Integration von Hand ist möglich, wenn man $\int \ln(t)^2 dt = \int \ln(t) \cdot \ln(t) dt$ partiell integriert und das Grundintegral $\int \ln(t) dt = t(\ln(t) - 1)$ verwendet.

b) Zeichnen Sie möglichst genau in der Gauss'schen Zahlenebene (5 Häuschen als Längeneinheit) die komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = 2 + 2\mathbf{i}$. Geben Sie anschliessend die Lösungen exakt und möglichst stark vereinfacht in der Polarform an.

c) Die wievielte Permutation seiner Buchstaben ist das Wort „MATURA"?

d) Berechnen Sie eine möglichst einfache Gleichung der zur Ebene E parallelen Tangenten an die Kugel k im Punkt B. Dabei gilt:

$$E : x + 2y - 2z = 0 \ , \quad k : (x - 11)^2 + (y - 13)^2 + (z - 12)^2 = r^2 \ , \quad B(-1/9/9)$$

e) Welchen Radius hat der Kreis, in dem die Ebene $F : x + 2y - 2z = 49$ die in d) gegebene Kugel schneidet?

f) Man kennt den Anteil p von Kranken unter der Bevölkerung $(0 < p < 1)$. Ein Test für diese Krankheit zeigt mit der Wahrscheinlichkeit q bei Kranken ein positives Resultat. Dagegen zeigt er mit der Wahrscheinlichkeit r bei Gesunden ein negatives Resultat. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit w, dass jemand krank ist, wenn das Testresultat positiv ist? Stellen Sie für $q = r = 0.9$ die Funktion $w(p)$ graphisch dar (8 Häuschen als Längeneinheit).

g) Ein gerader Kreiskegel mit halbem Öffnungswinkel α wird einer Kugel mit Radius r einbeschrieben. Berechnen Sie den Grundkreisradius ρ und die Höhe h des Kegels als Funktion von r und α. Für welchen Wert von α hat der Kreiskegel bei konstantem r maximales Volumen?