Kantonsschule Zürcher Oberland
Wetzikon

Maturitätsprüfungen 2008
schriftlich
Dauer: 4 Stunden

**MATHEMATIK**
**KLASSE C6a**

**Erlaubte Hilfsmittel:** 2 eigene Formelsammlungen mit Kopien aus „Formeln und Tafeln“, 2 Taschenrechner: TI-89 (nur mit Stochastik-Programmen)
**Bewertung:**

| Aufgabe | 1a | b | c | d | 2a | b | c | 3a | b | c | 4a | b | 5a | b | c | 6a | b | c | d | e | 7a | b | c | d | e | 8a | b | c | d | e | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 4 | 2 | 6 | 10 | 6 | 8 | 4 | 7 | 8 | 6 | 14 | 7 | 4 | 7 | 6 | 4 | 3 | 4 | 5 | 8 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 | 3 | 7 | 6 | 154 |

**Regeln und Hinweise:** Bearbeiten Sie bitte auf einer A4-Seite des verteilten, karierten Papiers nur eine einzige Aufgabe. Dieses Aufgabenblatt und alle Ihre Bearbeitungsblätter sind am Schluss der Prüfung mit Namen zu versehen und abzugeben. Für die Note 6 muss die Maximalpunktzahl nicht erreicht werden. Alle Berechnungen müssen so auf dem Papier stehen, wie wenn sie von Hand gemacht worden wären. Ausnahme: In der Stochastik können die erarbeiteten Programme verwendet werden, es soll aber deren Wirkung knapp angegeben werden.

**1.** Einem geraden Kreiskegel mit halbem Öffnungswinkel $\alpha$ ist eine Kugel mit Radius 1 einbeschrieben.

**a)** Berechnen Sie die Höhe $h$ und den Grundkreisradius $r$ des Kegels als Funktion von $u = \sin(\alpha)$.

**b)** Zeigen Sie, dass das Volumen des Kreiskegels proportional zu $F(u) = \frac{(1+u)^2}{u(1-u)}$ ist.

**c)** Für welchen Wert von $\alpha$ hat der Kreiskegel minimales Volumen? Weshalb darf bei dieser Extremalaufgabe mit $u$ anstelle von $\alpha$ gerechnet werden?

**d)** Diskutieren Sie die Funktion $F(u)$ aus Teilaufgabe b) hinsichtlich maximal möglichem Definitionsbereich, Nullstellen, Extrema, Asymptoten, Wendepunkten und gemäss Aufgabe sinnvollem Definitionsbereich.

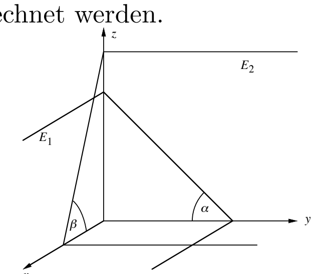
**2.** Das zwischen dem Graphen der Funktion $y = f(x) = 5x\mathrm{e}^{-x}$ $(x \geq 0)$ und der $x$-Achse eingeschlossene Flächenstück wird um die Achsen des Koordinatensystems rotiert und erzeugt Volumina.

**a)** Berechnen Sie lückenlos das Volumen bei Rotation um die $x$-Achse. Welche Sätze verwenden Sie dabei?

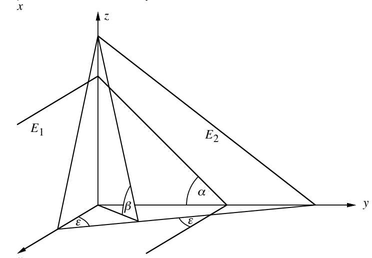
**b)** Bei der Rotation um die $y$-Achse kann man auf zwei Wegen vorgehen: Entweder werden vertikale Streifen mit Breite $dx$ und Länge $f(x)$ betrachtet und rotiert, oder es werden horizontale Streifen mit Breite $dy$ und Länge $x$ betrachtet und rotiert. Bei diesem Weg muss man aber zwei Volumina getrennt berechnen. Zeigen Sie, dass beide Wege das gleiche Resultat liefern.

**c)** Berechnen Sie die genaue Lage des Schwerpunkts des betrachteten Flächenstücks.

**3.** Zwei ebene Dachflächen stossen aneinander und es soll deren Zwischenwinkel $\gamma$ berechnet werden.




**a)** (Erstes Bild) Die beiden Traufen sollen die $xy$-Ebene definieren und einen rechten Winkel untereinander einschliessen. Damit kann man annehmen, dass die beiden Dachflächen $E_1$ bzw. $E_2$ senkrecht zur $yz$- bzw. $xz$-Ebene stehen. Ausserdem kennt man deren Neigungswinkel $\alpha$ bzw. $\beta$ gegenüber der $xy$-Ebene. Berechnen Sie den gesuchten Schnittwinkel $\gamma$ in Abhängigkeit von $\alpha$ und $\beta$. Zwei Zusatzfragen als Hilfe: Weshalb darf man den $x$-Achsenabschnitt von $E_2$ bzw. den $y$-Achsenabschnitt von $E_1$ gleich 1 setzen? Wie gross ist $\gamma$ für $\alpha = \beta = 45^\circ$ (2 Diagonalebenen im Würfel)?




**b)** (Zweites Bild) Während $E_1$ gleich bleibt wie in Teilaufgabe a) wird $E_2$ in eine allgemeinere Lage gedreht, und zwar so, dass die beiden Traufen nun den Winkel $\epsilon$ miteinander einschliessen. Nach wie vor sind $\alpha$ bzw. $\beta$ die Neigungswinkel gegenüber der $xy$-Ebene. $\beta$ ist in einer Normalebene zur ersten Spur von $E_2$ eingezeichnet worden. Berechnen Sie den Schnittwinkel $\gamma$ von $E_1$ und $E_2$ aufgrund der gegebenen Winkel $\alpha$, $\beta$ und $\epsilon$. Vereinfachen Sie das Resultat möglichst stark, kontrollieren Sie es für $\epsilon = 90^\circ$ und für den Grenzfall, dass sowohl $\alpha$ als auch $\beta$ gegen $90^\circ$ streben.

**c)** Berechnen Sie in der Situation von Teilaufgabe a) das Volumen des Raums, der unterhalb beider Dachflächen liegt und von den drei Koordinatenebenen begrenzt wird.

**4.** Taylorreihen

**a)** Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^4}$ in eine Taylorreihe an der Stelle $x_0 = a$. Berechnen Sie sie auf zwei verschiedenen Wegen. Der eine Weg soll über die $n$-te Ableitung der andere über eine bereits bekannte Taylorreihe gehen. Zeigen Sie, dass beide Wege zur gleichen Taylorreihe führen. Stellen Sie sodann die erste, zweite und dritte Näherung für einen selbstgewählten, geeigneten Wert von $a$ graphisch dar und äussern Sie eine Vermutung bezüglich der Konvergenz der Reihe.

**b)** Zeigen Sie mithilfe von MacLaurin-Reihen, dass die Beziehung $\cos(\mathbf{i}x) = \cosh(x)$ gilt (Hinweis: $\mathbf{i}^2 = -1$). Suchen und beweisen Sie sodann eine analoge Beziehung zwischen $\sin(x)$ und $\sinh(x)$.

**5.** Wir untersuchen folgende Aufgabe: „Eine Firma vertreibt Taschenrechner, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 9% fehlerhaft sind. Wie viele Taschenrechner muss ich bestellen, um mit 97% Wahrscheinlichkeit mindestens 80 einwandfrei funktionierende Taschenrechner zu erhalten?“

**a)** Geben Sie an, welche Gleichung oder Ungleichung man lösen müsste, um die Antwort exakt angeben zu können. Wie gehen Sie mit Unterstützung des Taschenrechners vor, um diese Gleichung oder Ungleichung exakt zu lösen? Geben Sie schliesslich die Antwort an, die Sie auf diesem Weg gefunden haben.

**b)** Es gibt aber auch ein fertiges Programm, mit dem die Antwort sofort gefunden werden kann. Welche Eingaben liefern welches Resultat? Welche Formel benützt dieses Programm? Wie kommt man auf sie? Welche Annahme steckt hinter der Formel? Welche Gültigkeitsbedingung legitimiert den Einsatz der Formel?

**c)** Wie viele Taschenrechner müssten die Hersteller untersuchen, um mit einer Sicherheit von 99% den vermuteten Prozentsatz fehlerhafter Taschenrechner auf einen Prozentpunkt genau einzugrenzen? Geben Sie ausgehend von der Beziehung $u = \frac{x-np}{\sqrt{npq}}$ die Umformungen an, mit denen man $n$ berechnet.

**6.** Bei einem Kinderfest wird Zahlen-Lotto gespielt: 11 nummerierte Kugeln liegen in einer Urne und es werden 5 Kugeln gezogen. Das 1. Spiel ist das traditionelle Lotto. Es wird aber später noch auf zwei andere Arten gespielt. Für jedes Spiel wird ein Lottozettel zum Ausfüllen eines Tipps den Kindern abgegeben:

**1. Spiel** — Setze 5 Kreuze

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

**2. Spiel** — Gib an, wie oft jede Zahl gezogen wird

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | 5 |

**3. Spiel** — Gib die 5 gezogenen Zahlen an

| 1. Zahl | 2. Zahl | 3. Zahl | 4. Zahl | 5. Zahl |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

**a)** Füllen Sie jeden Lottozettel einmal mit einem Beispiel aus und erklären Sie, auf welche Weise die Kugeln in jedem der drei Spiele gezogen werden sollen. Sind die Spielweisen durch die Zettel eindeutig festgelegt?

**b)** Geben Sie für jedes der drei Spiele (als sprechende Formel, exakt und als Dezimalzahl) die Wahrscheinlichkeit an, alle 5 Voraussagen richtig gemacht zu haben.

**c)** Geben Sie für zwei der drei Spiele (als sprechende Formel, exakt und als Dezimalzahl) die Wahrscheinlichkeit an, genau 3 Zahlen richtig vorausgesagt zu haben, also einen 3-er erzielt zu haben.

**d)** Von den 120 Kindern, die das 1. Spiel mitmachten, haben 48 einen 3-er erzielt. Man vermutete bereits im Voraus, dass es viele 3-er geben würde. Sind es aber signifikant viele? (Zeigen Sie 2 Methoden.)

**e)** Von den 120 Kindern haben im 1. Spiel keines einen 5-er, 5 einen 4-er, 48 einen 3-er, 50 einen 2-er, 14 einen 1-er und 3 einen 0-er erzielt. Testen Sie mit einem $\chi^2$-Test, ob Signifikanz beim 1. Spiel vorliegt.

**7.** Im dreidimensionalen Raum befinden sich viele kleine Teilchen, welche sich um die Kugel mit Radius 1 herum konzentrieren. Genauer: Die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Antreffen eines Teilchens im Abstand $r$ ($r > 1$) ist proportional zu $\frac{1}{r^3}$.

**a)** Weshalb ist $r$ eine Zufallsgrösse?

**b)** Bestimmen Sie die Verteilung (Wahrscheinlichkeitsdichte) von $r$.

**c)** Bestimmen Sie die Verteilung der neuen Zufallsgrösse $u = r^2$.

**d)** Bestimmen Sie die Verteilung der neuen Zufallsgrösse $v = \ln(r)$.

**e)** Bezeichnen Sie die drei Zufallsgrössen aus b), c) und d) mit $x$ und stellen Sie die drei Verteilungen in einem einzigen $(x/y)$-Koordinatensystem mit korrektem Definitionsbereich graphisch dar. Welche Bedeutung haben diese Kurven?

**8.** Ein Velofahrer durchfährt eine 10 km lange Strecke. Bei den Streckenmarken 0.5 km, 1.5 km, ... , 9.5 km sind Messposten aufgestellt, an denen die jeweilige Momentangeschwindigkeit gemessen wird. Es ergab sich folgende Liste von Zahlen in km/h: 18, 22, 24, 20, 19, 15, 19, 22, 24, 25. Leider wurde vergessen, auch die jeweilige Zeit zu notieren.

**a)** Berechnen Sie aufgrund der 10 in der Liste aufgeführten Geschwindigkeiten näherungsweise die Zeit $T$ (in Stunden), welche der Velofahrer für die ganze Strecke benötigte.

**b)** Nehmen wir an, dass genau doppelt so viele Messposten auf der Strecke schön regelmässig aufgestellt worden sind, an denen die Geschwindigkeiten $v_i$ gemessen wurden. Geben Sie mit Hilfe einer Summe und den als gegeben aufgefassten Grössen $v_i$ an, wie jetzt die Gesamtzeit $T$ des Velofahrers annähernd berechnet werden kann.

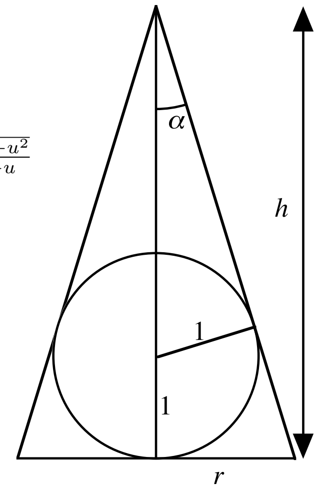
**c)** Nimmt man an, dass die Geschwindigkeit des Velofahrers an jeder Stelle $x$ der Strecke bekannt ist, dass also die Funktion $v(x)$ gegeben ist, so stellt sich die Frage, wie aus ihr die Gesamtzeit $T$ des Fahrradfahrers ermittelt werden kann. Stellen einen Zusammenhang zu den Teilaufgaben a) und b) her.

**d)** Geben Sie an, wie man aus der gegebenen Funktion $v(x)$ für jede Stelle der 10 km langen Strecke angeben kann, welche Zeit $t$ (gemessen ab Start) der Fahrradfahrer bis zur Stelle $x$ benötigt hat. Man bestimme also die Funktion $t(x)$. Konkret soll $t(x)$ für das Beispiel $v(x) = 10 - x$ berechnet und graphisch dargestellt werden. Was sagt die Graphik aus in Bezug auf die Fahrt über die 10 km lange Strecke?

**e)** Berechnen Sie die Funktion $v(t)$ für das in d) gegebene Beispiel und interpretieren Sie diese Funktion.

**Lösungen Mathematikmatur C6a 2008** (Jeder fette Punkt ist ein Bewertungspunkt)(Peter Gallin)

**1.a)**




- Bild
- $h = 1 + \frac{1}{\sin(\alpha)} = \frac{1+\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{1+u}{u} = 1 + \frac{1}{u}$
- $r = h \cdot \tan(\alpha)$
- $r = (1 + \frac{1}{\sin(\alpha)}) \cdot \tan(\alpha) = (1 + \frac{1}{\sin(\alpha)}) \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}} = \frac{1+\sin(\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}} = \frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\sqrt{1-u^2}}{1-u}$

**1.b)**

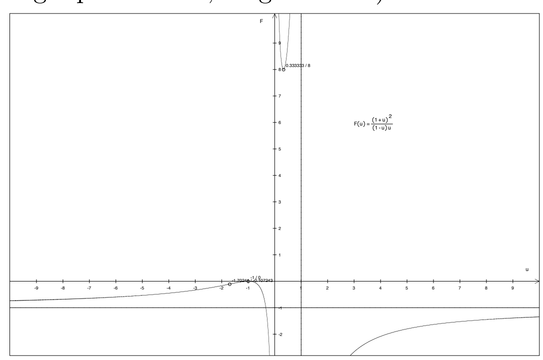
- $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}\frac{(1+\sin(\alpha))^2}{1-\sin^2(\alpha)} \cdot \frac{1+\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)}$
- $V = \frac{\pi}{3}\frac{(1+\sin(\alpha))^2}{(1-\sin(\alpha))\sin(\alpha)} = \frac{\pi}{3}\frac{(1+u)^2}{(1-u)u} = \frac{\pi}{3}F(u)$

**1.c)**

- Antwort: $u = \sin(\alpha)$ verhält sich monoton zu $\alpha$ für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
- $F'(u) = \frac{2(1+u)u(1-u)-(1+u^2)(-u+1-u)}{u^2(1-u)^2}$
- $F'(u) = \frac{(1+u)(2u-2u^2-(1+u)(1-2u))}{u^2(1-u)^2} = \frac{(1+u)(2u-2u^2-1+u+2u^2)}{u^2(1-u)^2}$
- $F'(u) = \frac{(1+u)(3u-1)}{u^2(1-u)^2} \stackrel{!}{=} 0$ (Dieser Punkt kann ev. in d) geholt werden)
- $u = \frac{1}{3}$ (nur als Antwort zu c))
- $\alpha = \arcsin(\frac{1}{3}) \approx 0.3398369 \approx 19.47122°$

**1.d)**

- Sinnvoller Definitionsbereich: $0 < u < 1$ (ev. auch $-1 < u < 0$ für Kegelspitze unten, Kugel aussen)
- Definitionsbereich: $\mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ mit Asymptoten für $u = 0$ und $u = 1$
- Doppelte Nullstelle für $u = -1$: Extrema für $u = \frac{1}{3}$ und $u = -1$
- Skizze vom Graph oder Überblick: $V(\frac{1}{3}) = \frac{8}{3}\pi$ oder $F(\frac{1}{3}) = 8$
- Horizontale Asymptote $F = -1$
- $F''(u) = \frac{((3u-1)+(1+u)\cdot 3)u^2(1-u)^2-(1+u)(3u-1)(2u(1-u)^2-u^2\cdot 2(1-u))}{u^4(1-u)^4}$
- $F''(u) = \frac{(6u+2)(u-u^2)-(3u^2+2u-1)(2(1-u)-2u)}{u^3(1-u)^3}$ (Kürzung)
- $F''(u) = \frac{2(3u^3+3u^2-3u+1)}{u^3(1-u)^3} \stackrel{!}{=} 0 \stackrel{TI-89}{\Longrightarrow} u \approx -1.7024$
- Wendepunkt: $(-1.7024/-0.107243)$
- Argument für Minimum z. B. $F''(\frac{1}{3}) = 81 > 0$ (ev. in c) holbar)



**2.a)**

- $V_x = \pi\int_0^\infty 25x^2 e^{-2x}dx = 25\pi\int_0^\infty x^2 e^{-2x}dx$
- 1. partielle Integration: $V_x = 25\pi\big([x^2 e^{-2x}(\frac{1}{-2})]_0^\infty - \int_0^\infty 2x e^{-2x}(\frac{1}{-2})dx\big)$
- Ausintegrierter Teil = 0 (Null mal Unendlich)
- 2. partielle Integration: $V_x = 25\pi\int_0^\infty x e^{-2x}dx = 25\pi\big([x e^{-2x}(\frac{1}{-2})]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-2x}(\frac{1}{-2})dx\big)$
- 3. Integration: $V_x = \frac{25\pi}{2}\int_0^\infty e^{-2x}dx = \frac{25\pi}{2}[e^{-2x}(\frac{1}{-2})]_0^\infty$
- $V_x = \frac{25\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{25\pi}{4}$

**2.b)**

- $V_{y1} = 2\pi\int_0^\infty x \cdot f(x)dx = 2\pi\int_0^\infty x \cdot 5x e^{-x}dx$
- Mehrfache partielle Integration: $V_{y1} = 10\pi\int_0^\infty x^2 e^{-x}dx = 10\pi\int_0^\infty 2x e^{-x}dx = 20\pi\int_0^\infty e^{-x}dx = 20\pi[-e^{-x}]_0^\infty$
- $V_{y1} = 20\pi$
- Idee des Aufteilens: $V_{y2} = \pi\int_1^\infty x^2|5e^{-x}(1-x)|dx - \pi\int_0^1 x^2|5e^{-x}(1-x)|dx$
- Begründung für Grenze für Aufteilung: $x = 1$: $f'(x) = 5e^{-x} + 5xe^{-x}(-1) = 5e^{-x}(1-x) = 0$
- $V_{y2} = \pi\int_1^\infty x^2 5e^{-x}(x-1)dx - \pi\int_0^1 x^2 5e^{-x}(1-x)dx$ (Vorzeichenproblem erkannt)
- $V_{y2} = \pi\int_1^\infty x^3 5e^{-x}dx - \pi\int_1^\infty x^2 5e^{-x}dx - \pi\int_0^1 x^2 5e^{-x}dx + \pi\int_0^1 x^3 5e^{-x}dx = 5\pi\int_0^\infty 3x^2 e^{-x}dx - 5\pi\int_0^\infty x^2 e^{-x}dx$ (explizite Rechnung)
- $V_{y2} = 10\pi\int_0^\infty x^2 e^{-x}dx = 20\pi$

**2.c)**

- $F = 5\int_0^\infty x e^{-x}dx$ und das Prinzip
- $F = 5\big([xe^{-x}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx\big) = 5$ (partielle Integration)

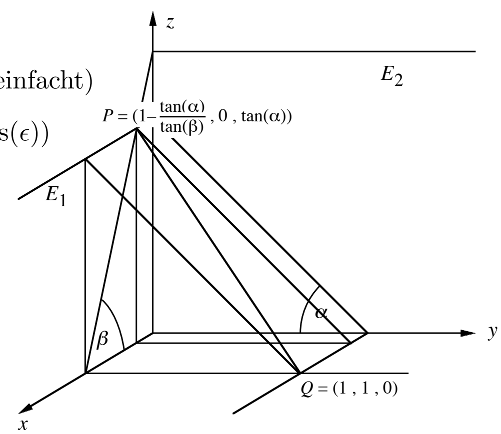
- $2\pi x_S \cdot F = V_y = 20\pi \Longrightarrow x_S = 2$
- $2\pi y_S \cdot F = V_x = \frac{25\pi}{4} \Longrightarrow y_S = \frac{25\pi}{4 \cdot 2\pi \cdot 5} = \frac{5}{8}$

**3.a)**

- $z$-Achsenabschnitte: $\tan(\alpha)$ und $\tan(\beta)$
- $E_1: \quad \frac{y}{1} + \frac{z}{\tan(\alpha)} = 1$
- $E_2: \quad \frac{x}{1} + \frac{z}{\tan(\beta)} = 1$
- $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\tan(\alpha)} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ \tan(\alpha) \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tan(\beta)} \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \tan(\beta) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sin(\beta) \\ 0 \\ \cos(\beta) \end{pmatrix}$
- $\gamma = \arccos(\frac{1}{\sqrt{(1+\tan(\alpha)^2)}\sqrt{(1+\tan(\beta)^2)}}) = \arccos(\cos(\alpha)\cos(\beta))$ (nicht unbedingt so vereinfacht)
- Antwort auf 1. Frage: Winkel $\gamma$ unabhängig von den Achsenabschnitten
- Antwort auf 2. Frage: $60°$ oder $120°$ für $\tan(\alpha) = \tan(\beta) = 1$

**3.b)**

- Abstand der 1. Spur von $E_2$ vom Ursprung: $\sin(\epsilon)$
- $z$-Achsenabschnitt von $E_2$: $\sin(\epsilon) \cdot \tan(\beta)$
- $y$-Achsenabschnitt von $E_2$: $\tan(\epsilon)$
- $E_2: \quad \frac{x}{1} + \frac{y}{\tan(\epsilon)} + \frac{z}{\sin(\epsilon) \cdot \tan(\beta)} = 1$ oder $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\tan(\epsilon)} \\ \frac{1}{\sin(\epsilon)\tan(\epsilon)} \end{pmatrix}$
- $\gamma = \arccos(\frac{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)\cos(\epsilon)}{\sqrt{(1+\tan(\alpha)^2)}\sqrt{(1+\tan(\beta)^2(\sin(\epsilon)^2)+\cos(\epsilon)^2))}})$ (nicht unbedingt so vereinfacht)
- $\gamma = \arccos(\frac{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)\cos(\epsilon)}{\sqrt{(1+\tan(\alpha)^2)(1+\tan(\beta)^2)}}) = \arccos(\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\epsilon))$
- $\gamma = \arccos(\cos(\alpha)\cos(\beta))$ für $\epsilon = 90°$ (wie bei Teilaufgabe a)
- $\gamma = \arccos(\cos(\epsilon)) = \epsilon$ für $\alpha = \beta = 90°$

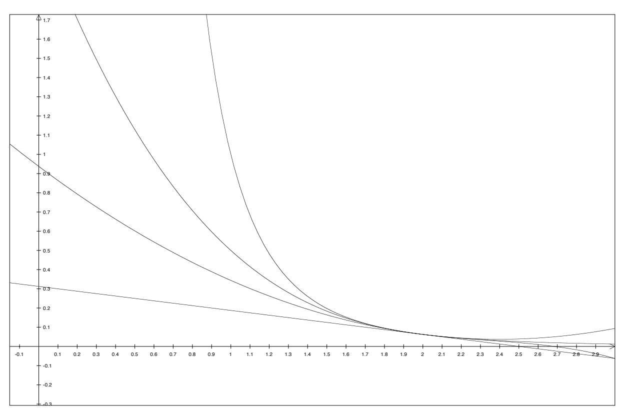



**3.c)**

- Sei $PQ$ die Schnittgerade der beiden Ebenen mit $P$ in $\Pi_3$ und $Q$ in $\Pi_1$
- $Q = (1, 1, 0)$
- Idee für die $x$-Koordinate von $P$
- $P = (1 - \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\beta)}, 0, \tan(\alpha))$
- Idee für Zerlegung: grosser Keil minus Tetraeder oder kleiner Keil plus vierseitige Pyramide
- $V = \frac{1}{2}\tan(\alpha) - \frac{\tan(\alpha)^2}{6\tan(\beta)} = (1 - \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\beta)}) \cdot 1 \cdot \frac{\tan(\alpha)}{2} + \frac{\tan(\alpha)^2}{3\tan(\beta)} = \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\beta)}(\frac{1}{2}\tan(\beta) - \frac{1}{6}\tan(\alpha))$

**4.a)**

- 1. Weg: $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $f'(x) = \frac{-4}{x^5}$, $f''(x) = \frac{4 \cdot 5}{x^6}$, $f'''(x) = \frac{-4 \cdot 5 \cdot 6}{x^7}$
- $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (n+3)!}{x^{n+4} \cdot 2 \cdot 3}$ oder Reihe ohne allgemeines Glied
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+3)!}{a^{n+4} \cdot 6} \cdot \frac{(x-a)^n}{n!}$ (Reihe mit allg. Glied)
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+3)(n+2)(n+1)}{6a^{n+4}} \cdot (x-a)^n$ (Kürzung)
- 2. Weg (z. B. Binomische Reihe): $\frac{1}{(x+a)^4} = (x+a)^{-4}$
- $\frac{1}{(x+a)^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-4}{k} x^k \cdot a^{-4-k}$ oder Idee mit geom. Reihe
- Ersetze $x$ durch $x - a$ (Verschiebung um a nach rechts)
- $\frac{1}{x^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-4}{k} \frac{(x-a)^k}{a^{k+4}}$
- Zu beweisen: $\binom{-4}{k} = \frac{(k+3)(k+2)(k+1)(-1)^k}{6}$



- Der Beweis: $\binom{-4}{k} = \frac{(-4)(-5)(-6) \cdot \ldots \cdot (-4-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k \cdot 2 \cot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (k+3)}{2 \cdot 3 \cdot k!} = \frac{(-1)^k \cdot (k+3)!}{6k!} = \frac{(-1)^k \cdot (k+3)(k+2)(k+1)}{6}$
- Wähle z. B. $a = 2$: $f(x) \approx \frac{1}{16} - \frac{4}{32} \cdot (x-2) + \frac{4 \cdot 5 \cdot}{64} \frac{(x-2)^2}{2} - \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{128} \cdot \frac{(x-2)^3}{6}$

oder $a = 1$: $f(x) \approx 1 - 4(x-1) + 10(x-1)^2 - 20(x-1)^3$

- Graph ohne explizite Einzelpolynome
- Guter Graph mit expliziten Einzelpolynomen:

Für $a = 2$: $y_1 = -\frac{1}{8}x + \frac{5}{16}$, $y_2 = \frac{5}{32}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{15}{16}$, $y_3 = -\frac{5}{32}x^3 + \frac{35}{32}x^2 - \frac{21}{8}x + \frac{35}{16}$

Für $a = 1$: $y_1 = -4x + 5$, $y_2 = 10x^2 - 24x + 15$, $y_3 = -20x^3 + 70x^2 - 84x + 35$

- Konvergenz: $0 < x < 2a$ (Idee des Konvergenzradius um $a$)

**4.b)**

- Explizit sichtbar: $\mathbf{i}^2 = \mathbf{i}^6 = \ldots = -1$ und $\mathbf{i}^4 = \mathbf{i}^8 = \ldots = 1$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \Longrightarrow \cos(\mathbf{i}x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$
- $f(x) = \cosh(x) = 1$ für $x = 0$, $f'(x) = \sinh(x) = 0$ für $x = 0$, $f''(x) = \cosh(x) = 1$ für $x = 0$
- $\Longrightarrow \cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$
- Vermutung: $\mathbf{i} \cdot \sin(\mathbf{i}x) = -\sinh(x)$ oder $\mathbf{i} \cdot \sin(x) = -\sinh(\frac{x}{\mathbf{i}}) = \sinh(\mathbf{i}x)$
- $\mathbf{i} \cdot \sin(\mathbf{i}x) = \mathbf{i} \cdot (\mathbf{i}x - \frac{(\mathbf{i}x)^3}{3!} + \frac{(\mathbf{i}x)^5}{5!} - \ldots)$
- $\mathbf{i} \cdot \sin(\mathbf{i}x) = -x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} - \ldots = -\sinh(x)$

**5.a)**

- $p_1 = 0.91$ für einen guter TR oder $p_2 = 0.09$ für einen schlechten TR
- $S_1 = \sum_{k=0}^{79} \binom{n}{k} p_1^k (1-p_1)^{n-k} \leq 3\%$ oder $S_2 = \sum_{k=0}^{n-80} \binom{n}{k} p_2^k (1-p_2)^{n-k} \geq 97\%$ (schneller)
- Pröbeln mit TI-89: Für $n = 94$ ist $S_1 = 0.020702522$ oder $S_2 = 0.979297478$
- Pröbeln gut sichtbar: Für $n = 93$ ist $S_1 = 0.038646$ oder $S_2 = 0.961354$

**5.b)**

- Programm "$u$ gesucht": 1-seitig, 97%: $u = 1.881$
- Programm "n gesucht" mit $x_{\min} = 80$ und $p = 0.91$: $n_1 = 93.64$ und $n_2 = 82.54$
- Richtige Wahl und zur sicheren Seite gerundet. Antwort: $n = 94$
- $n_1 = \frac{2x + u^2 q + u\sqrt{q(4x+u^2 q)}}{2p}$ aus dem TI-89 mit $q = 1 - p = 0.09$, $x = 80$ und $u = 1.881$
und nicht etwa $n_2$, das bei "höchstens 80 gute TR" zum Zuge käme
- $n_1$ erhält man durch Auflösen von $u = \frac{x-np}{\sqrt{npq}}$ nach $n$ (Quadratische Gleichung mit Lösungen $n_1$ und $n_2$)
- Annahme der Normalverteilung als Ersatz für Binomialverteilung
- Laplace-Bedingung nicht ganz erfüllt: $93 \cdot 0.09 \cdot 0.91 = 7.6 < 9$ (bei Ungenauigkeit nur 1 Punkt für letzte beiden Punkte)

**5.c)**

- Programm "$u$ gesucht": 2-seitig, 99%: $u = 2.575$
- Programm "$n$ und $p$ gesucht": Schätzwert: $p_s = 0.91$ oder $p_s = 0.09$
- Programm "$n$ und $p$ gesucht": $n > 5430.5$
- Idee der relativen Häufigkeit und 0.01 richtig gesetzt: $u \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}} = |\frac{x}{n} - p| \leq 0.01$
- $p = p_s = 0.09$: $\sqrt{n} \geq \frac{2.575 \cdot \sqrt{0.09 \cdot 0.91}}{0.01}$ (Umformungen)
- $n \geq (257.5 \cdot \sqrt{0.09 \cdot 0.91})^2 = 5430.48$

**6.a)**

- 1. Spiel ausgefüllt und erklärt: Ziehen ohne Zurücklegen, Reihenfolge unberücksichtigt
- 2. Spiel ausgefüllt und erklärt: Ziehen mit Zurücklegen, Reihenfolge unberücksichtigt
- 3. Spiel ausgefüllt und erklärt: Ziehen mit oder ohne Zurücklegen, Reihenfolge berücksichtigt
- Doppeldeutigkeit beim 3. Spiel

**6.b)**

- 1. Spiel: $\frac{\binom{5}{5}\binom{6}{0}}{\binom{11}{5}} = \frac{1}{\binom{11}{5}} = \frac{1}{462} \approx 0.0021645 = 0.21645\%$
- 2. Spiel: $\frac{1}{\binom{11+5-1}{5}} = \frac{1}{3003} \approx 0.000333 = 0.0333\%$
- 3. Spiel: a) mit Zurücklegen: $\frac{1}{11^5} = \frac{1}{161051} \approx 0.0000062 = 0.00062\%$
b) ohne Zurücklegen: $\frac{1}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{55440} \approx 0.000018 = 0.0018\%$

**6.c)**

- 1. Spiel: $\frac{\binom{5}{3}\binom{6}{2}}{\binom{11}{5}}$

- $= \frac{25}{77} \approx 0.324675 = 32.4675\%$
- 3. Spiel mit Zurücklegen: $\frac{\binom{5}{2} \cdot 10^2}{11^5}$
- $= \frac{1000}{161051} \approx 0.0062092 = 0.62092\%$

**6.d)**

- Einseitig signifikant: Programm "u gesucht": $u = 1.645$ (falls zweiseitig: Problem angesprochen)
- Konfidenzintervall: Programm "p gesucht" mit $n = 120$, $x = 48$, $u = 1.645$
- $p_1 = 0.32924$ und $p_2 = 0.47499$: Aus Nr 6.c): $p = 0.324675 < p_1$: also signifikant viele 3-er
- Einseitiges Testen der Hypothese $p < 0.324675$ mit $n = 120$ und mit $u = 1.645$
- ($x_1 = 30.52$) und $x_2 = 47.4 < 48$: Annahmebereich von 0 bis 47.4: 48 3-er sind signifikant viele.

**6.e)**

- 5-er: $p_5 = \frac{\binom{5}{5}\binom{6}{0}}{\binom{11}{5}} = \frac{1}{462}$, 4-er: $p_4 = \frac{\binom{5}{4}\binom{6}{1}}{\binom{11}{5}} = \frac{30}{462} = \frac{5}{77}$
- 3-er: $p_3 = \frac{\binom{5}{3}\binom{6}{2}}{\binom{11}{5}} = \frac{150}{462} = \frac{25}{77}$, 2-er: $p_2 = \frac{\binom{5}{2}\binom{6}{3}}{\binom{11}{5}} = \frac{200}{462} = \frac{100}{231}$
- 1-er: $p_1 = \frac{\binom{5}{1}\binom{6}{4}}{\binom{11}{5}} = \frac{75}{462} = \frac{25}{154}$, 0-er: $p_0 = \frac{\binom{5}{0}\binom{6}{5}}{\binom{11}{5}} = \frac{6}{462} = \frac{1}{77}$
- $\chi^2$ für 5 Freiheitsgrade und 95% Sicherheit: $\chi^2 = 11.1$
- $\chi^2 = \sum_{i=0}^{6} \frac{(120 \cdot p_i - x_i)^2}{120 \cdot p_i}$ oder $\chi^2 = \frac{1}{120} \sum_{i=0}^{6} \frac{x_i^2}{p_i} - 120$ (Idee der Summe)
- $\chi^2 = 120 \cdot \left( \frac{(\frac{6}{462} - \frac{3}{120})^2}{\frac{6}{462}} + \frac{(\frac{75}{462} - \frac{14}{120})^2}{\frac{75}{462}} + \frac{(\frac{200}{462} - \frac{50}{120})^2}{\frac{200}{462}} + \frac{(\frac{150}{462} - \frac{48}{120})^2}{\frac{150}{462}} + \frac{(\frac{30}{462} - \frac{5}{120})^2}{\frac{30}{462}} + \frac{(\frac{1}{462} - \frac{0}{120})^2}{\frac{1}{462}} \right)$

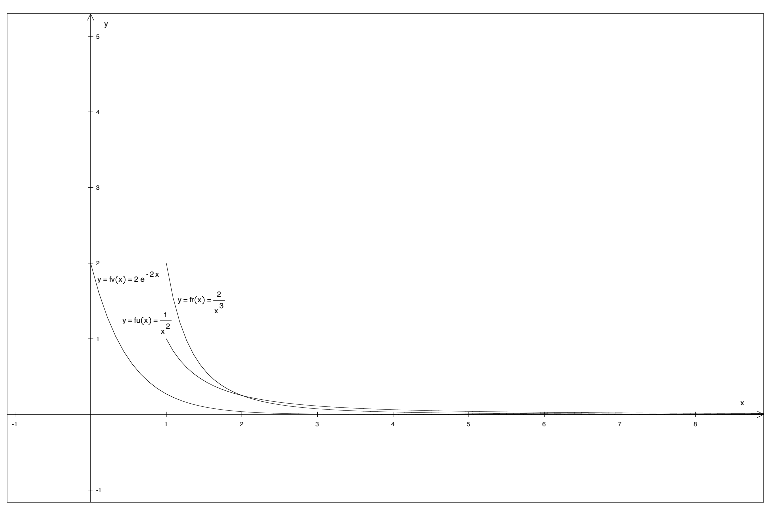
oder $\chi^2 = \frac{1}{120} \left( \frac{3^2}{\frac{6}{462}} + \frac{14^2}{\frac{75}{462}} + \frac{50^2}{\frac{200}{462}} + \frac{48^2}{\frac{150}{462}} + \frac{5^2}{\frac{30}{462}} + \frac{0^2}{\frac{1}{462}} \right) - 120$ (nur einigermassen richtig)
- $= \frac{18917}{3000} \approx 6.3 < 11.1$
- Urteil: nicht signifikant

**7.a)**

- Der Abstand von der Kugel ist die "Auszahlung", die man erhält, wenn man schaut, wo ein bestimmtes Teilchen gerade ist.

**7.b)**

- $\int_1^\infty \frac{1}{r^3} dr = [-\frac{1}{2r^2}]_1^\infty = \frac{1}{2}$ (Kehrwert der Normierungskonstanten)
- Gesuchte Dichtefunktion: $f_r(r) = \frac{2}{r^3}$




**7.c)**

- $u = r^2$, $\frac{du}{dr} = 2r$, $dr = \frac{du}{2r} = \frac{du}{2\sqrt{u}}$
- $1 = \int_1^\infty \frac{2}{r^3} = \int_1^\infty \frac{2}{u^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{du}{2u^{\frac{1}{2}}} = \int_1^\infty \frac{1}{u^2} du$
- Verteilung von $u$: $f_u(u) = \frac{1}{u^2}$ für $1 < u < \infty$

**7.d)**

- $v = \ln(r)$, $\frac{dv}{dr} = \frac{1}{r}$, $dr = dv \cdot r = dv \cdot \mathrm{e}^v$
- $1 = \int_1^\infty \frac{2}{r^3} = \int_0^\infty \frac{2}{\mathrm{e}^{3v}} \cdot \mathrm{e}^v dv = \int_0^\infty 2\mathrm{e}^{-2v} dv$
- Verteilung von $v$: $f_v(v) = 2\mathrm{e}^{-2v}$ für $0 < v < \infty$

**7.e)**

- Graphen von $f_r(x)$, $f_u(x)$ und $f_v(x)$
- Korrekter Definitionsbereich
- Bedeutung: Flächenstücke unter Kurven geben Wahrscheinlichkeit an

**8.a)**

- Ansatz der Kehrwerte: $T_1 = \frac{1}{18} + \frac{2}{22} + \frac{2}{24} + \frac{1}{20} + \frac{2}{19} + \frac{1}{15} + \frac{1}{25}$
- $T_1 = \frac{46247}{94050} \approx 0.4917278$ (h) (Mittelwert aller Geschw. gibt auch eine Näherung: $T' \approx 0.48077$ (h)

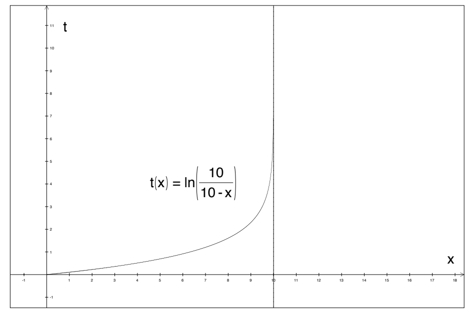
**8.b)**

- $T_2 = \sum_{i=1}^{20} \frac{0.5}{v_i}$ (konsequente Übertragung aus a))

**8.c)**

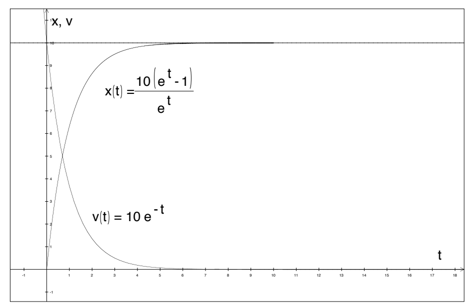
- $T = \int_0^{10} \frac{dx}{v(x)}$
- Die Wegabschnitte werden immer kleiner und werden mit $dx$ bezeichnet
- Aus der Summe wird das Integral (ev. auch mit falscher Grundidee in a))

**8.d)**



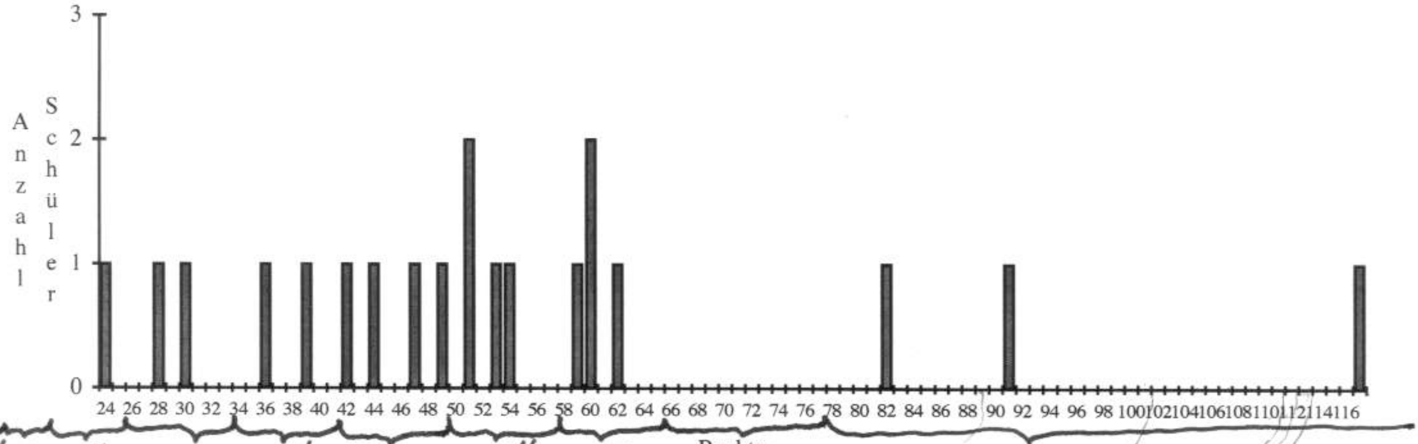

- $t(x) = \int_0^x \frac{dx'}{v(x')}$ (obere Grenze erkannt)
- $t(x) = \int_0^x \frac{dx'}{v(x')}$ (Integrationsvariable $x'$ erkannt)
- $t(x) = \int_0^x \frac{dx'}{10-x'}$
- $t(x) = \int_0^x \frac{dx'}{10-x'} = [-\ln(10-x')]_0^x$
- $t(x) = \int_0^x \frac{dx'}{10-x'} = [-\ln(10-x')]_0^x = \ln(10) - \ln(10-x) = \ln(\frac{10}{10-x})$
- Graph von $t(x)$
- Das Ende der Strecke ist in endlicher Zeit nicht erreichbar

**8.e)**




- Idee: Umkehrfunktion von $t(x) = \ln(\frac{10}{10-x})$
- Rechnung: $\mathrm{e}^t = \frac{10}{10-x} \implies 10 \cdot \mathrm{e}^t - x \cdot \mathrm{e}^t = 10 \implies x \cdot \mathrm{e}^t = 10(\mathrm{e}^t - 1)$
- $x(t) = \frac{10(\mathrm{e}^t - 1)}{\mathrm{e}^t} = 10(1 - \mathrm{e}^{-t})$
- Idee der Ableitung: $\dot{x}(t) = 10(\mathrm{e}^{-t}) = v(t)$ oder $v(t) = v(x(t)) = 10 - x(t)$
- Exponentielle Abnahme der Geschwindigkeit
- Graphen oder gute Interpretation

**Histogramm der erreichten Punktzahlen** $P$




| 1 | 1½ | 2 | 2½ | 3 | 3½ | 4 | 4½ | 5 | 5½ | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| bis | bis | bis | bis | bis | bis | bis | bis | bis | bis | |
| 5 | 11 | 18 | 25 | 33 | 41 | 49 | 57 | 65 | 77 | |

89 101 113

$$\text{Note} = N = \left\lfloor \frac{P+22}{16} \right\rfloor \quad \text{für } 19 \leq P \leq 65$$

abrunden auf halbganze Zahl