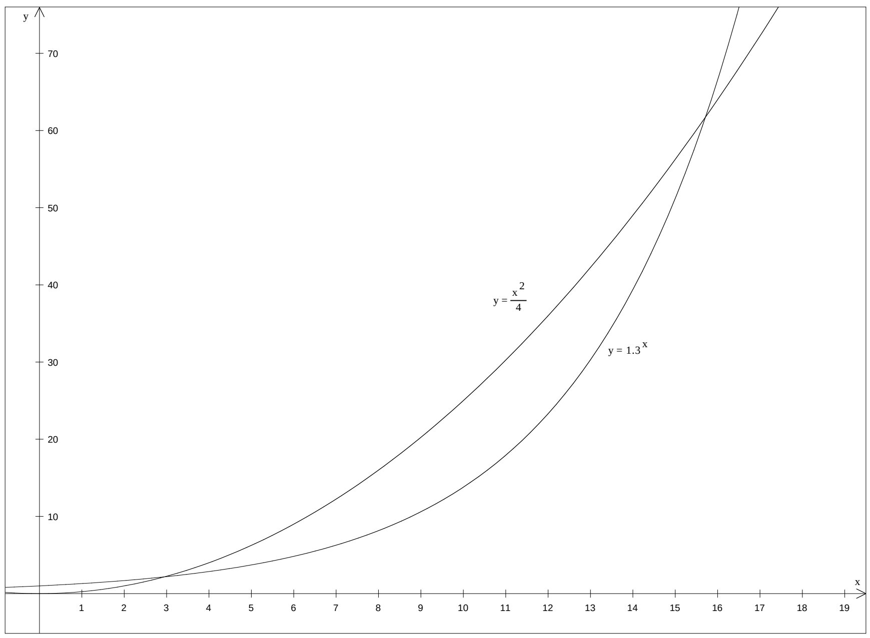
Eine schwere Induktionsaufgabe

Peter Gallin

Man beweise für grosse natürliche Zahlen n die folgende Ungleichung mit vollständiger Induktion

$$1.3^n > \frac{n^2}{4}$$

Verankerung: $n = 1 : \surd$, $n = 2 : \surd$, $n = 3 : f$, $n = 4 : f$, $\ldots$, $n = 15 : f$, $n = 16 : \surd$
Das merkwürdige Verhalten, das beim Versuch einer Verankerung auftritt, wird durch die folgende Graphik erhellt:



Induktionsschritt (Vererbung):
Voraussetzung:

$$1.3^n \overset{!}{>} \frac{n^2}{4}$$

Behauptung:

$$1.3^{(n+1)} \overset{?}{>} \frac{(n+1)^2}{4}$$

Beweis:

$$1.3^{(n+1)} \overset{\text{Potenzg.}}{=} 1.3 \cdot 1.3^n \overset{\text{Vor.}}{>} 1.3 \cdot \frac{n^2}{4} \overset{?}{>} \frac{(n+1)^2}{4}$$

Zu zeigen ist also die Ungleichung

$$1.3 \cdot \frac{n^2}{4} \overset{?}{>} \frac{(n+1)^2}{4} \quad .$$

Sie ist für positive n gleichbedeutend mit

$$1.3 \cdot n^2 \overset{?}{>} (n+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1.3} \cdot n \overset{?}{>} n+1 \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{1.3}-1)n \overset{?}{>} 1 \quad \Leftrightarrow \quad n \overset{?}{>} \frac{1}{\sqrt{1.3}-1} \approx 7.13$$

Dies bedeutet, dass die Vererbung erst für $n > 7$ beweisbar ist.